Semaine du 16/09

1 Cours

Séries numériques et familles sommables

Séries numériques (MPSI) Convergence, divergence, convergence absolue, divergence grossière. Somme partielle, somme et reste d'une série convergente. Séries de Riemann, séries géométriques. Comparaison série/intégrale. Nature d'une série par comparaison à une série de terme de signe constant (inégalité, équivalence, négligeabilité, domination). Séries alternées.

Compléments sur les séries numériques (MP) Règle de d'Alembert. Sommation des relations de comparaison.

Familles sommables (MPSI) Familles de réels positifs : somme dans $[0, +\infty]$, sommation par paquets, théorème de Fubini. Familles de complexes : sommabilité, sommation par paquets et théorème de Fubini (sous réserve de sommabilité). Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Intégrales impropres

Convergence/divergence Fonctions continues par morceaux. Nature d'une intégrale impropre. Propriétés générales : linéarité, positivité, relation de Chasles, l'intégrale d'une fonction continue et positive n'est nulle que si cette fonction est nulle.

Intégrabilité Définition. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire. Les fonctions intégrables sur un intervalle forment un espace vectoriel. Intégrabilité des fonctions $x \mapsto 1/x^\alpha$ sur $[a, +\infty[$, $x \mapsto 1/(x-a)^\alpha$ sur $]a, b]$, $x \mapsto 1/(b-x)^\alpha$ sur $[a, b[$ et $x \mapsto e^{\alpha x}$ sur $[a, +\infty[$. Intégrabilité par comparaison (majoration, domination, négligeabilité, équivalence).

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer la nature d'une série par comparaison à une série de nature connue (inégalité, domination, négligeabilité, équivalence).
- Utiliser les séries télescopiques : pour montrer qu'une suite (u_n) converge, il suffit de montrer que $\sum u_n - u_{n-1}$ converge et vice versa.
- Encadrer une somme partielle ou un reste à l'aide d'une intégrale. On peut alors déterminer un équivalent d'une somme partielle de série divergente ou d'un reste d'une série convergente.
- Pour obtenir un équivalent du reste R_n ou de la somme partielle S_n d'une série du type $\sum f(n)$, on peut
  - soit encadrer le reste ou la somme partielle à l'aide d'intégrales ;
  - soit 1. déterminer une primitive F de f ; 2. montrer que $f(n) \sim F(n) - F(n-1)$; 3. sommer cette relation d'équivalence (série télescopique) ; 4. en déduire $S_n \sim F(n)$ ou $R_n \sim -F(n)$ suivant le cas (divergent/convergent).
- Pour montrer la convergence/divergence d'une série de termes de signe non constant, on peut
  - montrer la convergence absolue ;
  - utiliser le critère spécial des séries alternées ;
  - utiliser un DL pour écrire le terme de la série comme somme du terme d'une série alternée et de termes de séries convergentes/divergentes.
- Pour déterminer la nature d'une intégrale impropre, on peut :
  - utiliser une primitive de l'intégrande et utiliser sa limite ;
  - comparer l'intégrande à une fonction du type $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ (au voisinage de 0 ou $+\infty$) ou $x \mapsto e^{\alpha x}$ (au voisinage de $+\infty$) au moyen de $\leq$, o, $\mathcal{O}$, $\sim$.

3 Questions de cours

BCCP Exercices 5, 6, 7, 28