

1 Cours

Espaces vectoriels normés

Normes Définition. Rappel sur les normes euclidiennes. Normes usuelles sur \mathbb{K}^n :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Norme de la convergence uniforme sur l'espace des applications bornées sur un ensemble X à valeurs dans \mathbb{K} . Normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \qquad \|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f|$$

Distance associée à une norme. Boules et sphères. Définition de la convexité d'une partie d'un \mathbb{R} -espace vectoriel. Convexité des boules. Equivalence de normes. Toutes les normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes. Partie bornée, application bornée. Produit d'espaces vectoriels normés : norme produit.

Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé Convergence/divergence. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques. Suites extraites et valeurs d'adhérence.

Révisions de première année sur les suites et séries numériques

Séries

Compléments sur les séries numériques Règle de d'Alembert. Comparaison série/intégrale. Sommation des relations de comparaison.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une application est une norme, on peut essayer de l'exprimer à l'aide d'une norme connue.
- Calculer une norme uniforme d'une suite ou d'une fonction par une étude de cette suite ou de cette fonction.
- Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on exhibe une suite u tel que $\frac{N_2(u_n)}{N_1(u_n)}$ tende vers 0 ou $+\infty$.
- Pour montrer qu'une suite diverge, on peut extraire deux suites convergeant vers des limites différentes.
- Utiliser une série télescopique pour déterminer la somme d'une série. Par exemple, dans le cas d'une série $\sum F(n)$ où F est une fraction rationnelle (décomposition en éléments simples).
- Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour déterminer la convergence et la somme d'une série de Taylor.
- Déterminer la nature d'une série par comparaison à une série de nature connue (inégalité, domination, négligeabilité, équivalence).
- Utiliser les séries télescopiques : pour montrer qu'une suite (u_n) converge, il suffit de montrer que $\sum u_n - u_{n-1}$ converge et vice versa.
- Encadrer une somme partielle ou un reste à l'aide d'une intégrale. On peut alors déterminer un équivalent d'une somme partielle de série divergente ou d'un reste d'une série convergente.
- Pour obtenir un équivalent du reste R_n ou de la somme partielle S_n d'une série du type $\sum f(n)$, on peut
 - soit encadrer le reste ou la somme partielle à l'aide d'intégrales ;
 - soit 1. déterminer une primitive F de f ; 2. montrer que $f(n) \sim F(n) - F(n-1)$; 3. sommer cette relation d'équivalence (série télescopique) ; 4. en déduire $S_n \sim F(n)$ ou $R_n \sim -F(n)$ suivant le cas (divergent/convergent).
- Pour montrer la convergence/divergence d'une série de termes de signe non constant, on peut
 - montrer la convergence absolue ;
 - utiliser le critère spécial des séries alternées ;
 - utiliser un DL pour écrire le terme de la série comme somme du terme d'une série alternée et de termes de séries convergentes/divergentes (ex : $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$).

3 Questions de cours

Banque CCP BCCP 1, 5, 6, 7, 46