Semaine du 03/10 au 07/10

1 Cours

Séries

Compléments sur les séries numériques Règle de d'Alembert. Comparaison série/intégrale. Sommation des relations de comparaison.

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé Convergence/divergence. Divergence grossière. Somme d'une série. Série télescopique. Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence en **dimension finie**. Exponentielle d'une matrice et d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Familles sommables

Familles de réels positifs Somme d'une famille de réels positifs (elle appartient à $[0,+\infty]$). Si $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, la somme de la famille (u_n) est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ($+\infty$ si la série diverge). Théorème de sommation par paquets et théorème de Fubini pour les familles de réels positifs (valides même si la somme est infinie).

Famille de complexes Sommabilité et somme d'une famille de complexes. Une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum u_n$ converge absolument et, dans ce cas, sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Théorème de sommation par paquets et théorème de Fubini pour les familles sommables de complexes.

Aplications Produit de familles sommables : si $(u_i)_{i\in \mathrm{I}} \in \ell^1(\mathrm{I})$ et $(v_j)_{j\in \mathrm{J}} \in \ell^1(\mathrm{J})$, alors $(u_i v_j)_{(i,j)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}} \in \ell^1(\mathrm{I}\times\mathrm{J})$ et $\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} u_i v_j = \left(\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i\right)\left(\sum_{j\in\mathrm{J}} v_j\right)$. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer la nature d'une série par comparaison à une série de nature connue (inégalité, domination, négligeabilité, équivalence).
- Utiliser les séries télescopiques : pour montrer qu'une suite (u_n) converge, il suffit de montrer que $\sum u_n - u_{n-1}$ converge et vice versa.
- Encadrer une somme partielle ou un reste à l'aide d'une intégrale. On peut alors déterminer un équivalent d'une somme partielle de série divergente ou d'un reste d'une série convergente.
- Pour obtenir un équivalent du reste R_n ou de la somme partielle S_n d'une série du type $\sum f(n)$, on peut
  - soit encadrer le reste ou la somme partielle à l'aide d'intégrales ;
  - soit 1. déterminer une primitive F de f ; 2. montrer que $f(n) \sim \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(n-1)$; 3. sommer cette relation d'équivalence (série télescopique) ; 4. en déduire $\mathrm{S}_n \sim \mathrm{F}(n)$ ou $\mathrm{R}_n \sim -\mathrm{F}(n)$ suivant le cas (divergent/convergent).
- Pour montrer la convergence/divergence d'une série de termes de signe non constant, on peut
  - montrer la convergence absolue ;
  - utiliser le critère spécial des séries alternées ;
  - utiliser un DL pour écrire le terme de la série comme somme du terme d'une série alternée et de termes de séries convergentes/divergentes (ex : $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$).
- Pour montrer qu'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé converge, on peut montrer qu'elle converge absolument. On est alors ramené à l'étude d'une série **numérique**.

3 Questions de cours

Retour sur le DS n°1

1. Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{L} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$.

2. On pose $\mathrm{J} = -\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{K} = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{J} = \mathrm{K} = \mathrm{L}$.
3. Exprimer $\mathrm{K} + \mathrm{L}$ en fonction de $\mathrm{L} + \mathrm{J}$.
4. En déduire la valeur de L.

Série exponentielle et produit de Cauchy On admet que pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer à l'aide d'un produit de Cauchy que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ e^{a+b} = e^a e^b$.

BCCP 61