Semaine du 04/11

1 Cours

Réduction géométrique

Rappels et compléments Matrices semblables. Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. La dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels est inférieure ou égale à la somme des dimensions avec égalité si et seulement si la somme est directe. Matrices définies par blocs, opérations sur des matrices définies par blocs. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Matrices et endomorphismes nilpotents. Indice de nilpotence. Sous-espace stable. Base adapatée à un sous-espace vectoriel stable. Matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à un sous-espace stable (triangulaire par blocs).

Eléments propres Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre. La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le cardinal du spectre est inférieur ou égal à la dimension. Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Polynôme caractéristique Définition du polynôme caractéristique. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré n (n étant égal à la taille de la matrice où la dimension de l'espace vectoriel) ; coefficients des monômes de degré 0 et $n-1$. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme u, alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u. Multiplicité d'une valeur propre. La dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité.

2 Méthodes à maîtriser

- Déterminer le spectre et les sous-espaces propres via l'équation aux éléments propres : déterminer les scalaires λ tels que $u(x) = \lambda x$ admet une solution x non nulle.
- Déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'une matrice via le polynôme caractéristique.
- Déterminer le spectre et les sous-espaces propres d'un endomorphisme : on peut se ramener à la matrice de l'endomorphisme dans une base bien choisie.
- Pour calculer un polynôme caractéristique d'une matrice, on peut :
  - développer par rapport à une ligne ou une colonne comportant beaucoup de zéros ;
  - faire apparaître un déterminant triangulaire ou triangulaire par blocs par opérations de pivots ;
  - factoriser dès que possible une ligne ou une colonne par $X - \lambda$.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 59, 60, 64, 71, 83

Retour sur le DS n°3 : espace $L^2(\mathbb{R}_+)$ On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et de carrés intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de E est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $(f,g) \in E^2 \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E.