Semaine du 09/01 au 13/01

1 Cours

Espaces préhilbertiens réels (révisions de MPSI)

Topologie

On rappelle que toutes les définitions et les résultats du cours restent inchangés si une norme est remplacée par une norme **équivalente**.

Topologie d'un espace vectoriel normé Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Ouverts, fermés, voisinages. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection quelconque de fermés est un fermé. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert. Une réunion **finie** de fermés est un fermé. Caractérisation séquentielle des fermés. Intérieur, adhérence, frontière. Caractérisation séquentielle de l'adhérence. Densité. Caractérisation séquentielle de la densité. Topologie relative : ouvert, fermé, voisinage relatifs à une partie.

Limite d'une application Définition. Caractérisation séquentielle de la limite. Opérations algébriques. Composition. Limite d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés.

Continuité Définition. Caractérisation séquentielle de la continuité. Opérations algébriques. Composition. Continuité d'une application à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés. Continuité uniforme. Continuité uniforme. Applications lipschitziennes. La «lipschitzianité» implique la continuité uniforme qui implique la continuité.

Continuité des applications linéaires, multilinéaires, polynomiales Notation $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$: ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Caractérisation de la continuité pour les applications linéaires : $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est continue si et seulement si $\exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}$. Si E est de dimension **finie**, $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue ou d'une matrice. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Toute application multilinéaire sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions **finies** est continue. Toute application polynomiale est continue.

Continuité et topologie Caractérisation de la continuité par les images réciproques des ouverts et des fermés. Deux applications **continues** coïncidant sur une partie **dense** sont égales.

Compacité Définition. Tout compact est fermé et borné. Toute partie fermée d'un compact est compacte. Une suite à valeurs dans un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit de compacts. L'image d'un compact par une application continue est compacte. Théorème des bornes atteintes : une fonction continue sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum. Théorème de Heine. Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées. Touts sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

Connexité par arcs Définition. Un convexe est connexe par arcs. Partie étoilée. Toute partie étoilée est connexe par arcs. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Composantes connexes par arcs. L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. Théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un intervalle.

Suites et séries de fonctions On considère des applications d'une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions. La convergence uniforme implique la convergence simple. Théorème de la double limite. Transfert de continuité. Convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme qui implique la convergence simple. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle. Interversion série/limite. Transfert de continuité. Les applications $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(\mathrm{M})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \mapsto \exp(u)$ (E de dimension finie) sont continues.

2 Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une partie est fermée, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une intersection de fermés ;
  - la décrire comme une réunion finie de fermés ;
  - la décrire comme une image réciproque de fermé par une application continue ;
  - utiliser la caractérisation séquentielle.
- Pour montrer qu'une partie est ouverte, on peut :
  - utiliser la définition (raisonner en termes de boules) ;
  - la décrire comme une réunion d'ouverts ;
  - la décrire comme une intersection finie d'ouverts ;

    - la décrire comme une image réciproque d'ouvert par une application continue ;
    - montrer que son complémentaire est fermé (cf. point précédent).

- Pour montrer qu'une application est continue, on peut :
    - utiliser les résultats sur les opérations algébriques et la composition de fonctions continues ;
    - si l'application est linéaire, utiliser la caractérisation de la continuité pour de telles applications ;
    - si l'application est linéaire et que son espace de départ est de dimension finie, il n'y a rien à faire ;
    - identifier une application multilinéaire ou polynomiale.

- Pour calculer la norme subordonnée d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, on peut :
    - déterminer une constante K telle que $\forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\|_{\mathrm{F}} \leq \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}$ (ce qui prouve en passant la continuité de f) ;
    - déterminer un vecteur x non nul tel que $\|f(x)\|_{\mathrm{F}} = \mathrm{C}\|x\|_{\mathrm{E}}$ (c'est notamment possible si $\dim \mathrm{E} < \infty$) ou exhiber une suite (x_n) de vecteurs non nuls de E tels que $\dfrac{\|f(x_n)\|_{\mathrm{F}}}{\|x_n\|_{\mathrm{E}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{C}$.
    - on peut alors conclure que $|||f||| = \mathrm{C}$.

- Utiliser la densité pour montrer que deux applications continues sont égales (notamment la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

- Montrer qu'une partie est dense : utiliser la définition ou la caractérisation séquentielle.

- Savoir montrer quelques résultats classiques de topologie matricielle, par exemple :
    - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
    - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
    - $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une parie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
    - $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

- Pour montrer qu'une partie est compacte :
    - on peut montrer qu'elle est fermée et bornée (cas de la dimension finie) ;
    - on peut montrer que c'est l'image d'un compact par une application continue.

- Pour montrer qu'une partie est connexe par arcs :
    - on peut appliquer la définition (existence de chemins continus à valeurs dans cette partie reliant les points de cette partie) ;
    - on peut montrer que c'est l'image d'un connexe par arcs (par exemple un intervalle) par une application continue.

- Pour montrer qu'une partie n'est pas connexe par arcs :
    - on peut montrer que son image par une application continue n'est pas connexe par arcs.

- Montrer qu'une application est un produit scalaire. Dans l'ordre : symétrie, linéarité par rapport à l'**une** des deux variables (la linéarité par rapport à la seconde variable s'obtient par symétrie), positivité, définition.

- Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz notamment dans le cas des produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Orthonormaliser une famille libre à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

- Déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

- Calculer un projeté orthogonal.

- Calculer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 13, 35, 36, 38, 77, 80, 81, 82, 92