Semaine du 23/01 au 27/01

1 Cours

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien Théorème de Riesz : représentation des formes linéaires d'un espace euclidien. Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Propriétés de l'adjonction : linéarité, adjoint d'une composée, involutivité. Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien de base **orthornomée** $\mathcal{B}$, alors $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top$. Si F est un sous-espace stable par un endomorphisme u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Matrices orthogonales Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^\top M = I_n$. Une matrice est orthogonale si et seulement si la famille de ses lignes ou de ses colonnes est orthonormée pour le produit canonique. Groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$. Matrices orthogonales positives et négatives. Groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations des isométries parmi les endomorphismes d'un espace euclidien : conservation du produit scalaire, l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée est une base orthonormée, l'adjoint est égal à l'inverse. Groupe orthogonal O(E). Isométries vectorielles directes et indirectes. Groupe spécial orthogonal SO(E).

Réduction des isométries Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Les matrices de $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. L'application $\theta \mapsto R(\theta)$ est un morphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. Rotation d'un plan euclidien. Les isométries directes d'un plan euclidien sont les rotations. Les isométries indirectes d'un plan euclien sont les réflexions. Si un sous-espace vectoriel est stable par une isométrie, son orthogonal l'est également. Réduction d'une isométrie d'un espace euclidien : si $u \in O(E)$, il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$ ou $R(\theta)$. Rotation d'un espace euclidien de dimension 3. Les isométries directes d'un espace euclidien de dimension 3 sont les rotations.

Endomorphismes auto-adjoints et matrices symétriques Définition d'un endomorphisme auto-adjoint. Espace vectoriel $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien E. Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u. Un endomorphisme est auto-adjoint si et seulement si sa matrice dans une base **orthonormée** est symétrique. Les projecteurs auto-adjoints sont les projecteurs orthogonaux. Théorème spectral pour les endomorphismes auto-adjoints et interprétation matricielle. Endomorphismes auto-adjoints (définis) positifs. Caractérisation spectrale : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif (resp. défini positif) si et seulement si $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\operatorname{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$). Matrices symétriques (définies) positives. Caractérisation spectrale : $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est positive (resp. définie positive) si et seulement si $\operatorname{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$ (resp. $\operatorname{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$).

2 Méthodes à maîtriser

- Connaître les différentes caractérisations des isométries vectorielles : adjoint, conservation du produit scalaire, conservation de la norme.
- Utiliser le lien entre adjonction et transposition.
- Utiliser de préférence des bases orthonormées par défaut.
- Calculer la matrice d'un projecteur orthogonal ou d'une symétrie orthogonale.
- Déterminer si un endomorphisme est une isométrie directe/indirecte via sa matrice dans une base orthonormée ; préciser le cas échéant ses éléments caractéristiques.
- Diagonaliser un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée de vecteurs propres.
- Utiliser le fait qu'une matrice symétrique est orthogonalelement semblable à une matrice diagonale.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 66, 68

Retour sur le DS n°06 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

1. Etudier la convergence simple de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.
2. Etudier les variations de u_n. Que peut-on conclure pour la convergence de la série $\sum u_n$? La somme S de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Retour sur le DS n°06 Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Déterminer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J.

   On note alors $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in$ J..
2. Montrer que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J.
3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.