

# SEMAINE DU 03/02

## 1 Cours

### Révisions de probabilités MPSI

**Expérience aléatoire** Univers, issue, événement, événement élémentaire, événement contraire, événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

**Espaces probabilisés finis** Probabilité. Définition et propriétés (réunion, différence, croissance, événement contraire). Distribution de probabilités sur un ensemble. Probabilité uniforme.

**Probabilités conditionnelles** Définition. Si  $A$  est un événement de probabilité non nulle,  $\mathbb{P}_A$  est une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes.

**Événements indépendants** Couple d'événements indépendants. Famille d'événements mutuellement indépendants.

**Variable aléatoire** Définition. Loi d'une variable aléatoire. Loïs usuelles : loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale. Loi conditionnelle.

**Couples et  $n$ -uplets de variables aléatoires** Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle. Extension aux  $n$ -uplets de variables aléatoires. Couples de variables aléatoires indépendantes. Variables aléatoires mutuellement indépendantes. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors  $\sum_{i=1}^n X_i$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . Les images de deux variables aléatoires indépendantes sont indépendantes. Lemmes des coalitions.

**Espérance, covariance, variance** Définition et propriétés de l'espérance. Espérance des lois usuelles. Formule de transfert. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ . Définition et propriétés de la covariance. Variables aléatoires décorélées. Deux variables aléatoires indépendantes sont décorélées. Variance et écart-type : définition et propriétés. Variance des lois usuelles. Variance d'une somme de variables aléatoires décorélées.

**Inégalités** Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Modéliser une expérience aléatoire **concrète** (lancers de dés, tirages de boules, ...) à l'aide d'événements et de variables aléatoires : il s'agit essentiellement de **nommer** les événements et les variables aléatoires pertinents.
- **Partitionner** un événement pour en calculer la probabilité.
- Calculer les lois marginales à partir de la loi conjointe :  $\forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$ .
- Utiliser la formule de transfert pour calculer l'**espérance** de l'**image**  $Y = f(X)$  d'une variable aléatoire  $X$  de loi connue. Il est alors inutile de déterminer la loi de  $Y$ .
- Calculer la variance d'une variable aléatoire à l'aide de la formule de transfert :  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$  et  $\mathbb{E}(X^2)$  se calcule avec la formule de transfert.
- Appliquer la formule des probabilités totales à un système complet d'événements, typiquement  $\{X = x\}_{x \in X(\Omega)}$  où  $X$  est une variable aléatoire. Application aux chaînes de Markov.
- Connaître les lois usuelles ainsi que leurs espérances et leurs variances.
- **Renverser** le conditionnement à l'aide de la formule de Bayes.

## 3 Questions de cours

**Banque CCP** Exos 95, 98, 101, 104, 105, 107, 109