

# SEMAINE DU 06/03 AU 10/03

## 1 Cours

### Probabilités

**Ensembles dénombrables** Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ . Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ . Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable.

**Univers probabilisé** Tribu. Stabilité par passage au complémentaire, intersection et union finie ou dénombrable. Espace probabilisable.

Probabilité sur un espace probabilisable. Continuité croissante/décroissante. Si  $(A_n)$  est une suite d'événements,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ . Événements négligeables/presque sûrs. Une union finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre. Si  $\Omega$  est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur  $\Omega$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{R}_+$  indexée par  $\Omega$  et de somme 1. Support d'une distribution de probabilités discrète ; le support est au plus dénombrable. Probabilité définie sur  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  associée à une distribution de probabilités discrètes sur  $\Omega$ .

**Probabilité conditionnelle et indépendance** Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes. Événements indépendants. Si A et B sont indépendants, A et B sont indépendants.

**Variations aléatoires** Définition d'une variable aléatoire discrète. Loi d'une variable aléatoire. Image d'une variable aléatoire. Si  $X \sim Y$ , alors  $f(X) \sim f(Y)$ . Lois usuelles : loi géométrique, loi de Poisson (plus les lois usuelles de première année). Couples de variables aléatoires : loi conjointe, loi marginale, loi conditionnelle. Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe. Variables aléatoires indépendantes. Notation  $X \perp\!\!\!\perp Y$ . Si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ . Lemme des coalitions. Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.

**Espérance, variance, covariance** Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Une variable aléatoire X à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est dite d'espérance finie si  $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ . Notation  $X \in L^1$ . Espérance des lois usuelles. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Formule de transfert. Espérance d'un produit de deux variables aléatoires

indépendantes. Formule d'antirépartition : pour une variable aléatoire X à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$  (égalité

dans  $[0, +\infty]$ ). Notation : si X est une variable aléatoire réelle, on dit que  $X \in L^2$  si  $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ . Si  $X \in L^2$ , alors  $X \in L^1$ .

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans  $L^2$ , alors  $XY \in L^1$  et  $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ . Variance d'une variable aléatoire

réelle  $X \in L^2$  :  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ . Ecart-type. Formule de König-Huygens :  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ .  $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ .

Variance des lois usuelles. Covariance de deux variables aléatoires X et Y dans  $L^2$  :  $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) =$

$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ . Covariance de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme, cas de variables aléatoires

deux à deux indépendantes (théorème de Pythagore).

## 2 Méthodes à maîtriser

- Savoir récupérer les lois marginales à partir de la loi conjointe.
- Reconnaître un cas concret de loi géométrique : temps d'attente du premier succès lors d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
- Partitionner un événement pour en calculer la probabilité.
- Appliquer la formule des probabilités totales : bien souvent, les énoncés donnent des probabilités conditionnelles.
- Appliquer la formule de transfert pour calculer l'espérance de  $f(X)$  : seule la loi de X est nécessaire, pas besoin de la loi de  $f(X)$ .
- Calculer une variance : appliquer la formule de transfert pour calculer  $\mathbb{E}(X^2)$ .

## 3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 97, 100, 102, 103, 106, 108, 111