Semaine du 20/03 au 24/03

1 Cours

Intégrales à paramètres

Passage à la limite Théorème de convergence dominée : cas discret et cas continu. Théorème d'intégration terme à terme.

Continuité Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

Dérivabilité Classe $\mathcal{C}^1$ d'une intégrale à paramètre, extension pour la classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) ou $\mathcal{C}^\infty$.

2 Méthodes à maîtriser

- Utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite d'une suite d'intégrales (dans le cas où on ne peut pas appliquer le théorème pour les suites de fonctions convergeant uniformément sur un segment).
- Exprimer une intégrale sous forme d'une somme de série : écrire l'intégrande sous forme d'une somme de série de fonctions (typiquement à l'aide d'un développement en série entière) et appliquer le théorème d'intégration terme à terme (dans le cas où on ne peut appliquer le théorème pour les séries de fonctions convergeant uniformément sur un segment).
- Pour les théorèmes de continuité ou de dérivabilité d'une intégrale à paramètre, il suffit d'avoir la domination sur tout segment.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 29, 30

Intégrale de Gauss Soient $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.
2. Montrer que $f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Retour sur le DS n°13 Soient U et V deux variables aléatoires telles que U^2 et V^2 soient d'espérances finies.

En remarquant que $\mathbb{E}((\mathrm{U}+t\mathrm{V})^2) \geq 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\mathbb{E}(\mathrm{UV})^2 \leq \mathbb{E}(\mathrm{U}^2)\mathbb{E}(\mathrm{V}^2)$.