Semaine du 27/03 au 31/03

1 Cours

Fonctions à valeurs vectorielles

Les fonction considérées sont des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

Dérivabilité Définition. La dérivabilité implique la continuité. Une fonction est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a. Coordonnées de la dérivée dans une base. Opérations : dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, de $\mathrm{L} \circ f$ où L est linéaire, de $\mathrm{B}(f, g)$ où B est bilinéaire (cas du produit scalaire), de $\mathrm{M}(f_1, \dots, f_n)$ où M est multilinéaire, de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et opérations.

Intégration Fonctions continues par morceaux. Définition de l'intégrale sur un segment à partir des fonctions coordonnées (indépendante de la base choisie). Propriétés : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire. Sommes de Riemann. Dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young.

Suites et séries de fonctions Interversion limite/intégration, série/intégration, limite/dérivation, série/dérivation. Dérivabilité et dérivée de $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{A})$ où $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(tu)$ où $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Equations différentielles linéaires

Révisions de première année Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1. Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.

Généralités Equation différentielle linéaire. Equation homogène associée. Principe de superposition. Problème de Cauchy.

Solutions d'une équation différentielle linéaire Théorème de Cauchy linéaire. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' = a(t)(x)$ avec $a : \mathrm{I} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ continue est un espace vectoriel de dimension égale $\dim \mathrm{E}$. L'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire $x' = a(t)(x) + b(t)$ avec $a : \mathrm{I} \to \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $b : \mathrm{I} \to \mathrm{E}$ continues est un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée. Interprétation matricielle.

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants Rappels sur l'exponentielle d'une matrice/d'un endomorphisme : $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \exp(\mathrm{M})$ est continue ; $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(t\mathrm{M})$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \mathrm{M}\exp(t\mathrm{M}) = \exp(t\mathrm{M})\mathrm{M}$; si A et B commutent, $\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$. Solutions d'un système différentiel homogène à coefficients constants. Résolution par réduction matricielle (diagonalisation/trigonalisation).

2 Méthodes à maîtriser

- Calculer l'exponentielle d'une matrice diagonale, nilpotente.
- Calculer l'exponentielle d'une matrice A :
  - de manière générale, on peut calculer les puissances de A à l'aide d'une division euclidienne de X^n par un polynôme annulateur de A ; on peut ensuite calculer $\exp(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n!}$;
  - si la matrice A est diagonalisable, alors $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec D diagonale puis $\exp(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\exp(\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}$;
  - si la matrice A est trigonalisable, alors $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$ avec T triangulaire ; on peut alors écrire $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ avec D diagoanle et N nilpotente qui commutent ; enfin $\exp(\mathrm{D}+\mathrm{N}) = \exp(\mathrm{D})\exp(\mathrm{N})$.
- Résolution d'un système différentiel homogène à coefficients constants : écriture matricielle puis réduction.

3 Questions de cours

Banque CCP Exercices 3, 42, 74, 75