

# SEMAINE DU 01/04

## 1 Cours

### Calcul différentiel

**Différentiabilité** Dérivée directionnelle (selon un vecteur). Dérivées partielles. Différentiabilité (existence d'un DL à l'ordre 1). Lien entre différentielle et dérivées directionnelles. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Différentielle d'une application constante, linéaire. Gradient et expression dans une base orthonormée.

**Opérations sur les applications différentiables** Différentielle d'une combinaison linéaire, de  $M(f_1, \dots, f_p)$  où  $M$  est multilinéaire et  $f_1, \dots, f_p$  sont différentiables. Différentielle d'une composée d'applications différentielles. Dérivée de  $f \circ \gamma$  où  $f$  est différentiable et  $\gamma$  est dérivable sur un intervalle.

**Différentiabilité** Dérivée directionnelle (selon un vecteur). Dérivées partielles. Différentiabilité (existence d'un DL à l'ordre 1). Lien entre différentielle et dérivées directionnelles. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Différentielle d'une application constante, linéaire. Gradient et expression dans une base orthonormée.

**Opérations sur les applications différentiables** Différentielle d'une combinaison linéaire, de  $M(f_1, \dots, f_p)$  où  $M$  est multilinéaire et  $f_1, \dots, f_p$  sont différentiables. Différentielle d'une composée d'applications différentielles. Dérivée de  $f \circ \gamma$  où  $f$  est différentiable et  $\gamma$  est dérivable sur un intervalle.

**Applications de classe  $\mathcal{C}^k$**  Une application est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  si elle est différentiable et que sa différentielle est continue. Une application est de classe  $\mathcal{C}^1$  si et seulement si elle possède des dérivées partielles continues. Intégrale curviligne. Une application est constante sur un connexe par arcs si et seulement si sa différentielle  $y$  est nulle. Dérivées partielles d'ordre supérieur. Une application est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  si ses dérivées partielles d'ordre  $k$  existent et sont continues. Théorème de Schwarz. Opérations sur les applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Tangence et orthogonalité** Vecteur tangent à une partie. Ligne de niveau. Vecteurs tangents à une ligne de niveau : caractérisation par la différentielle et le gradient.

**Optimisation des fonctions numériques** Point critique. Si une application différentiable admet un extremum local en un point, alors il s'agit d'un point critique. Optimisation sous contrainte : si  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que la restriction de  $f$  à  $X = g^{-1}(\{0\})$  admet un extremum local en  $x \in X$  où  $dg(x) \neq 0$ , alors  $df(x)$  est colinéaire à  $dg(x)$ . Traduction en termes de gradient. Hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Condition nécessaire/suffisante sur le gradient et la hessienne pour qu'une application de classe  $\mathcal{C}^2$  possède un extremum local.

## 2 Méthodes à maîtriser

- Etudier la continuité, l'existence de dérivées partielles et la continuité des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.
- Prouver la différentiabilité et calculer la différentielle en exhibant un DL d'ordre 1.
- Calculer la différentielle à l'aide des dérivées partielles.
- Calculer le gradient à l'aide de la différentielle ou des dérivées partielles.
- Application de la règle de la chaîne pour calculer des dérivées partielles de composées.
- Rechercher des extrema globaux avec ou sans contrainte.

## 3 Questions de cours

**Banque CCP** Exercices 33, 41, 52, 56, 57, 58