Réduction algébrique

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, qui en pratique sera généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

1.1 Définition d'un polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

Définition 1.1

(i) Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathrm{P}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$.

(ii) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On pose $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{A}^n$.

Exemple 1.1

Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, alors $\mathrm{P}(u) = u^2 + u + \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ (et non $u^2 + u + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).
Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$, alors $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + \mathrm{I}_n$ (et non $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + 1$, ce qui n'aurait aucun sens).

Remarque. Si M est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure) de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors pour tout polynôme P, P(M) est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure) de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Remarque. Si M est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure) par blocs de blocs diagonaux $\mathrm{D}_1, \dots, \mathrm{D}_n$, alors pour tout polynôme P, P(M) est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure, resp. triangulaire inférieure) par blocs de blocs diagonaux $\mathrm{P}(\mathrm{D}_1), \dots, \mathrm{P}(\mathrm{D}_n)$.

Exercice 1.1

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Montrer que $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u)$ et $\operatorname{Im} \mathrm{P}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par u.

Lemme 1.1

(i) Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times \mathrm{E}$, $u(x) = \lambda x \implies \mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$.

(ii) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Alors pour tout $(\lambda, \mathrm{X}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \implies \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{X}$.

1.2 Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

Définition 1.2 Sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'application $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[u]$, est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{L}(E)$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. L'image de ce morphisme, notée $\mathbb{K}[A]$, est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 1.2

Soient f et g deux endomophismes d'un espace vectoriel E. Montrer que si g commute avec f, alors g commute avec tout élément de $\mathbb{K}[f]$.

Remarque. Si $\mathcal{B}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}\right.$ est un morphisme d'algèbres. On en déduit notamment que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u))$.

1.3 Lemme des noyaux

Théorème 1.1 Lemme des noyaux

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes premiers entre eux deux à deux et $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$.

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$$

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{Ker} P(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(A)$$

Exemple 1.2 Projecteur

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E. Le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ annule p donc

$$E = \operatorname{Ker}(p^2 - p) = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$$

Exemple 1.3 Symétrie

Soit s une symétrie d'un espace vectoriel E. Le polynôme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule s donc

$$E = \operatorname{Ker}(s^2 - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$$

Exemple 1.4 Résolution d'une équation différentielle

On souhaite déterminer les solutions à valeurs complexes de l'équation différentielle $(\mathcal{E}):\ y'''-y=0$. On montre aisément par récurrence que toute solution de $(\mathcal{E})$ appartient à $\mathrm{E}=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. De plus, en notant $\mathrm{D}:\ y\in\mathrm{E}\mapsto y'$, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est $\mathrm{Ker}(\mathrm{D}^3-\mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Puisque $\mathrm{X}^3-1=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-j)(\mathrm{X}-j^2)$, le lemme des noyaux permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\mathrm{D}^3-\mathrm{Id}_\mathrm{E})&=\mathrm{Ker}(\mathrm{D}-\mathrm{Id}_\mathrm{E})\oplus\mathrm{Ker}(\mathrm{D}-j\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})\oplus\mathrm{Ker}(\mathrm{D}-j^2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})\\&=\mathrm{vect}(x\mapsto e^x)\oplus\mathrm{vect}(x\mapsto e^{jx})\oplus\mathrm{vect}(x\mapsto e^{j^2x})\end{aligned}$$

Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont donc les fonctions

$$x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{jx}+\nu e^{j^2x}\text{ où }(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{C}^3$$

Exemple 1.5 Récurrence linéaire

On souhaite déterminer les suites $u\in\mathrm{E}=\mathbb{R}^\mathbb{N}$ vérifiant

$$(\mathcal{R}):\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n$$

En notant $\mathrm{S}:\ (u_n)\in\mathrm{E}\mapsto(u_{n+1})$, l'ensemble des suites vérifiant $(\mathcal{D})$ est $\mathrm{Ker}(\mathrm{S}^3-2\mathrm{S}^2-\mathrm{S}+2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$. Puisque $\mathrm{X}^3-2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+2=(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)$, le lemme des noyaux permet d'affirmer que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\mathrm{S}^3-2\mathrm{S}^2-\mathrm{S}+2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})&=\mathrm{Ker}(\mathrm{S}-\mathrm{Id}_\mathrm{E})\oplus\mathrm{Ker}(\mathrm{S}+\mathrm{Id}_\mathrm{E})\oplus\mathrm{Ker}(\mathrm{S}-2\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})\\&=\mathrm{vect}((1)_{n\in\mathbb{N}})\oplus\mathrm{vect}(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}})\oplus\mathrm{vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$

Les suites réelles u vérifiant $(\mathcal{R})$ sont donc les suites de terme général

$$\lambda+\mu(-1)^n+\nu 2^n\text{ où }(\lambda,\mu,\nu)\in\mathbb{R}^3$$

2 Application à la réduction

2.1 Polynômes annulateurs

Définition 2.1 Polynôme annulateur

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **polynôme annulateur** de u tout polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(u)=0$.

(ii) Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme annulateur** de A tout polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{A})=0$.

Méthode **Calcul d'inverse à l'aide d'un polynôme annulateur**

Si une matrice ou un endomorphisme admet un polynôme annulateur de coefficient constant non nul, cette matrice ou cet endomorphisme est inversible et on peut exprimer son inverse sous la forme d'un polynôme en cette matrice ou cet endomophisme.

Exemple 2.1

Soit A une matrice annulé par $X^2 - 3X + 2$. Alors $A^2 - 3A + 2I_n = 0$ ou encore $\frac{1}{2}(3A - A^2) = I_n$, c'est-à-dire

$$\frac{3A - I_n}{2}A = A\frac{3A - I_n}{2} = I_n$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{3A - I_n}{2}$.

Méthode Calcul de puissances à l'aide d'un polynôme annulateur

Soit P un polynôme annulant une matrice A ou un endomorphisme u. En notant R_n le reste de la division euclidienne de X^n par P, $A^n = R_n(A)$ ou $u_n = R_n(u)$.

Exercice 2.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.1 Polynôme annulateur et valeur propre

(i) Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel et P un polynôme annulateur de u. Alors toute valeur propre de u est racine de P.

(ii) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P un polynôme annulateur de A. Alors toute valeur propre de A est racine de P.

Attention ! La réciproque est fausse. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre.

Exemple 2.2 Spectre d'un projecteur

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E. Le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ annule p donc $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.
L'inclusion peut être stricte si $s = \mathrm{Id}_E$ ou $s = -\mathrm{Id}_E$.

Exemple 2.3 Spectre d'une symétrie

Soit s une symétrie d'un espace vectoriel E. Le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annule s donc $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$.
L'inclusion peut être stricte si $s = \mathrm{Id}_E$ ou $s = -\mathrm{Id}_E$.

Corollaire 2.1 Polynôme annulateur et diagonalisabilité

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

Corollaire 2.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par f. Alors $u_{|F}$ est diagonalisable.

Remarque. En fait, de manière générale, si F est stable par u, $\mathrm{Sp}(u_{|F}) \subset \mathrm{Sp}(u)$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u_{|F})$, $E_\lambda(u_{|F}) = E_\lambda(u) \cap F$.

Exercice 2.2

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si u et v commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux diagonales.

Théorème 2.1 Cayley-Hamilton

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors $\chi_u(u) = 0$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\chi_A(A) = 0$.

Exercice 2.3

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exemple 2.4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, on sait que $\chi_A = X^n$ de sorte que $A^n = 0$. L'indice de nilpotence de A est donc majoré par n.

Proposition 2.2 Polynôme annulateur et trigonalisabilité

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors u est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A scindé sur $\mathbb{K}$.

Exercice 2.4

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un même espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si u et v commutent, alors il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires supérieures.

Définition 2.2 Sous-espaces caractéristiques

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéritique est scindé i.e.

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\mu_\lambda}$$

On appelle **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{\mu_\lambda}$.

Proposition 2.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéritique est scindé i.e.

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\mu_\lambda}$$

Alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E)^{\mu_\lambda}$.

Remarque. La restriction de u au sous-espace caractéristique $C_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E)^{\mu_\lambda}$ est la somme de l'homothétie $\lambda \, \mathrm{Id}_{C_\lambda}$ et de l'endomorphisme nilpotent $u_{C_\lambda} - \lambda \, \mathrm{Id}_{C_\lambda}$.

Corollaire 2.3 Dimension d'un sous-espace caractéristique

La dimension d'un sous-espace caractéristique est égale à la multiplicité de la valeur propre à laquelle il est associé.

Remarque. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéritique est scindé i.e.

$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{\mu_\lambda}$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim \mathrm{Ker}(u - \lambda \, \mathrm{Id}_E)^{\mu_\lambda} = \mu_\lambda$.

Corollaire 2.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. Alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs où chaque bloc diagonal est la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice triangulaire supérieure stricte.

Remarque. Plus précisément, si $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, alors A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\
& \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_n & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{matrix}}
\end{pmatrix}$$

Décomposition de Dunford

Il en résulte qu'il existe des endomorphismes d et n de E tels que

- $u = d + n$;
- d est diagonalisable ;
- n est nilpotent ;
- d et n **commutent**.

On peut alors montrer que ces endomorphismes d et n sont uniques. L'écriture $u = d + n$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de l'endomorphisme u.
De même, il existe des matrices D et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

- $A = D + N$;
- D est diagonalisable ;
- N est nilpotente ;
- D et N **commutent**.

A nouveau, ces matrices D et N sont uniques. L'écriture $A = D + N$ s'appelle la **décomposition de Dunford** de la matrice A.

2.2 Idéal annulateur et polynôme minimal

Définition 2.3 Idéal annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée

(i) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de u.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le noyau du morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de A.

Proposition 2.4 Polynôme minimal

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. L'idéal annulateur de u admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de u, noté π_u.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'idéal annulateur de A admet un unique générateur unitaire appelé **polynôme minimal** de A, noté π_A.

Remarque. En clair, ceci signifie que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \iff \pi_u \mid P \qquad \text{et} \qquad P(A) = 0 \iff \pi_A \mid P$$

Attention ! L'idéal annulateur d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie peut être réduit à $\{0\}$, auquel cas il n'existe pas de polynôme minimal.
Par exemple, l'idéal annulateur de l'endomorphisme $D : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P'$ est nul.

Exemple 2.5

Le polynôme minimal d'un projecteur sur un sous-espace vectoriel non trivial est $X(X-1)$.
Le polynôme minimal d'une symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel non trivial est $(X-1)(X+1)$.

Corollaire 2.5

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Alors π_u divise χ_u.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors π_A divise χ_A.

Attention ! Une erreur classique consiste à croire qu'il suffit d'«enlever» les puissances du polynôme caractéristique pour obtenir le polynôme minimal.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-1)^2(X-2)^2$ et on vérifie que $(X-1)(X-2)$ n'annule pas A. On a en fait $\pi_A = (X-1)(X-2)^2$.

Exemple 2.6

(i) Si u est un endomorphisme nilpotent d'indice p d'un espace vectoriel de dimension n, alors son polynôme minimal est X^p. Puisque son polynôme caractéristique est X^n et que π_u divise χ_u, on en déduit $p \leq n$.

(ii) Si A est une matrice nilpotente d'indice p de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors son polynôme minimal est X^p. Puisque son polynôme caractéristique est X^n et que π_A divise χ_A, on en déduit $p \leq n$.

Exercice 2.5 Matrice compagnon

Soient $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que $\chi_A = \pi_A = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Proposition 2.5 Le polynôme minimal est un invariant de similitude

Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme minimal.

Proposition 2.6 Spectre et polynôme minimal

(i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des racines de π_A.

(ii) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de E de **dimension finie**. Alors $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de π_u.

Exemple 2.7 Calcul d'un polynôme minimal

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On trouve $\chi_A = X(X-1)^2$. Ainsi le polynôme minimal de A vaut $X(X-1)$ ou $X(X-1)^2$. On vérifie que $A(A - I_3) = 0$ donc $\pi_A = X(X-1)$.

Exemple 2.8 Calcul d'un polynôme minimal

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_A = (X-1)^3$. Ainsi π_A vaut $X-1$, $(X-1)^2$ ou $(X-1)^3$. Comme $A \neq I_3$, $\pi_A \neq X - 1$. On vérifie que $(A - I_3)^2 = 0$ donc $\pi_A = 0$.

Proposition 2.7 Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

Soient u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel stable par F. Alors $\pi_{u_{|F}}$ divise π_u.

Proposition 2.8 Diagonalisabilité et polynôme minimal

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

(ii) Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Dans ce cas, $\pi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)$.

Proposition 2.9 Trigonalisabilité et polynôme minimal

(i) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

(ii) Une matrice carrée est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Proposition 2.10 Dimension de la sous-algèbre engendrée par un endomorphisme ou une matrice carrée

(i) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de **dimension finie**. Posons $d = \deg \pi_u$. Alors $\dim \mathbb{K}[u] = d$ et $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $d = \deg \pi_A$. Alors $\dim \mathbb{K}[A] = d$ et $(A^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.