

# SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Dans tout ce chapitre,  $A$  désigne une partie de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Suites de fonctions

### 1.1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

#### Définition 1.1 Convergence simple

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $(f_n)$  **converge simplement** sur  $A$  vers une fonction  $f$  de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  si

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

#### Exemple 1.1

On pose  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $x \mapsto e^x$ .

#### Exercice 1.1

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$ . Montrer que si les  $f_n$  sont croissantes / décroissantes / convexes / concaves, alors  $f$  est croissante / décroissante / convexe / concave.

#### Rappel Norme uniforme

On rappelle que la **norme uniforme** est définie sur l'ensemble des fonctions bornées de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

#### Définition 1.2 Convergence uniforme

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $(f_n)$  **converge uniformément** sur  $A$  vers une fonction  $f$  de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  si les fonctions  $f_n - f$  sont bornées à partir d'un certain rang et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

**REMARQUE.** En termes de quantificateurs, la **convergence simple** s'écrit :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

La **convergence uniforme** s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

On notera la place du quantificateur « $\forall x \in A$ ».

**REMARQUE.** Si une suite de fonctions converge uniformément sur  $A$ , elle converge uniformément sur toute partie de  $A$ .

**Proposition 1.1 La convergence uniforme implique la convergence simple**

Si une suite de fonctions  $(f_n)$  converge **uniformément** sur  $A$  vers  $f$ , alors elle converge **simple**ment vers  $f$  sur  $A$ .



**ATTENTION!** La réciproque est fausse.

**Méthode** Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions dont on souhaite montrer qu'elle converge uniformément.

1. On étudie d'abord la convergence simple. On fixe  $x \in A$  et on étudie la limite éventuelle de la suite  $(f_n(x))$ . Si cette limite existe, on note  $f(x)$  cette limite. Ainsi  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur l'ensemble  $D$  des  $x$  pour lesquels cette limite existe.
2. Il s'agit ensuite de montrer que  $\|f_n - f\|_\infty$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On doit donc trouver une majoration de  $|f(x) - f_n(x)|$  **indépendante** de  $x$ . Pour cela, on peut étudier les variations de  $f_n - f$  sur  $A$  pour déterminer la borne supérieure (ou éventuellement le maximum) de  $|f_n - f|$  sur  $A$ .

**Exemple 1.2**

Soit  $a \in [0, 1[$ . On considère la suite de fonctions de terme général  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto n^a x^n (1 - x)$ .

1. Etudions d'abord la convergence simple. Si  $x \in [0, 1[$ ,  $(f_n(x))$  converge vers 0 par croissances comparées. De plus,  $f_n(1) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle.
2.  $f_n$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et  $f'_n(x) = n^a x^{n-1}(n - (n+1)x)$ . Comme  $f_n(0) = f_n(1) = 0$ , on en déduit aisément que  $f_n$  est positive sur  $[0, 1]$  et qu'elle admet son maximum en  $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ . Ainsi

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^a}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

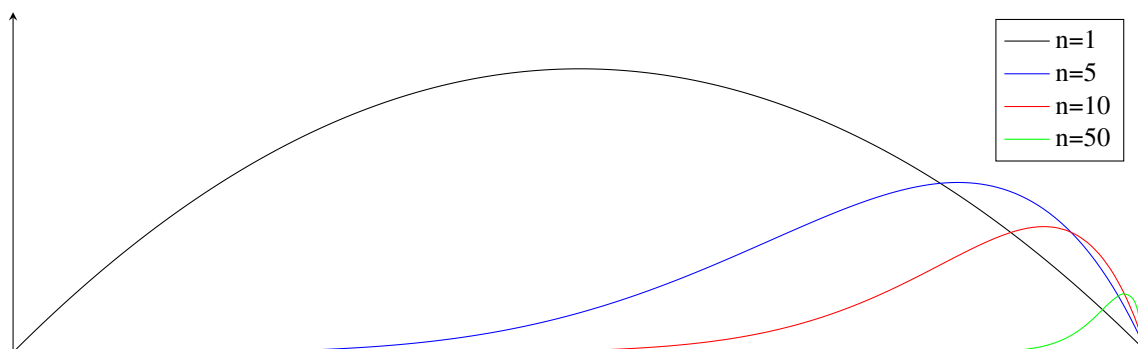
Or

$$\ln\left(\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n\right) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -1$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{-1}$$

Par ailleurs,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{n+1} = 0$  car  $a < 1$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$  donc  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle.

**Graphes des fonctions  $x \mapsto \sqrt{n}x^n(1-x)$** 

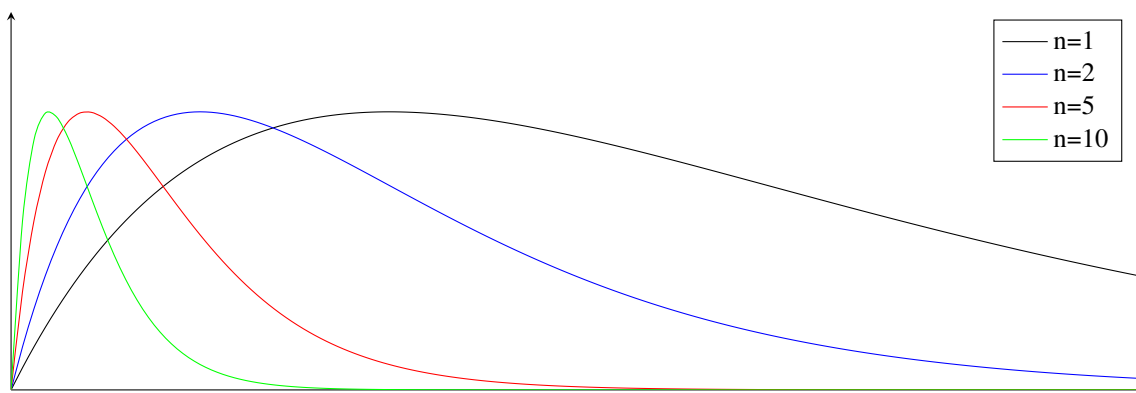
**Méthode** Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément

- Tout d'abord, si une suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas simplement, elle ne peut converger uniformément.
- Si l'on veut montrer qu'une suite de fonctions  $(f_n)$  convergeant simplement vers  $f$  **ne converge pas uniformément**, il suffit de trouver une suite  $(x_n) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$  tel que la suite  $(f(x_n) - f_n(x_n))$  ne converge pas vers 0.
- En effet, si  $(f_n)$  convergeait uniformément, elle convergerait uniformément vers  $f$  et on aurait donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) - f_n(x_n) = 0$  quelle que soit la suite  $(x_n) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$  choisie.

**Exemple 1.3**

Posons  $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto nxe^{-nx}$ . On montre aisément que  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$  vers la fonction nulle (croissance comparée si  $x > 0$  et traiter le cas  $x = 0$  à part).

Une étude de fonctions montre que  $f_n$  admet son maximum en  $x_n = \frac{1}{n}$ . Or  $f_n(x_n) = e^{-1}$  donc la suite  $(f_n(x_n))$  ne converge pas vers 0. La suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge donc pas uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Graphes des fonctions  $x \mapsto nxe^{-nx}$** 

**ATTENTION!** Si  $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$  est une famille **infinie** de parties de  $A$  et si  $(f_n)$  converge uniformément sur chacun des  $A_i$ , alors  $(f_n)$  ne converge pas forcément uniformément sur  $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$ .  
C'est néanmoins vrai lorsque la famille  $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$  est **finie**.

**Exercice 1.2**

Montrer que la suite de fonctions  $(x \mapsto nxe^{-nx})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur tout **segment** de  $\mathbb{R}_+$  mais pas sur  $\mathbb{R}_+$ .

**1.2 Théorèmes d'interversion****Rappel** Point adhérent

On rappelle que  $a \in F$  est **adhérent** à  $A$  si tout voisinage de  $a$  (ou toute boule ouverte de centre  $a$ ) possède une intersection non vide avec  $A$ .

**Théorème 1.1 Théorème de la double limite**

Soient  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  **convergeant uniformément** vers  $f$  sur  $A$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  possède une limite **finie**  $\ell_n \in \mathbb{K}$  en  $a$ , alors

- la suite  $(\ell_n)$  possède une limite en  $\ell$ ;
- $\lim_a f = \ell$ .

**REMARQUE.** Le résultat reste valide si  $a = \pm\infty$  (dans ce cas  $A$  doit être une partie de  $\mathbb{R}$  non majorée ou non minorée).

**REMARQUE.** Il s'agit d'un théorème d'interversion dans le sens où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$



**ATTENTION!** L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle. Considérons par exemple les fonctions  $f_n : x \in [0, 1[ \mapsto x^n$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge **simplemment** sur  $[0, 1[$  vers la fonction nulle. De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} f_n = 1$  mais la limite de la fonction nulle en 1 est 0 et non 1.

On en déduit en particulier que la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1[$ .

**Théorème 1.2 Transfert de continuité**

Si  $(f_n)$  est une suite de fonctions **continues** sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  convergeant **uniformément** vers  $f$  sur tout segment de  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .



**ATTENTION!** L'hypothèse de convergence **uniforme** est à nouveau essentielle. Considérons les fonctions  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ . Les fonctions  $f_n$  sont bien continues sur  $[0, 1]$ . Cependant, la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $x \in [0, 1] \mapsto \delta_{x,1}$  qui est discontinue en 1.

On en déduit en particulier que la suite  $(f_n)$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .



**ATTENTION!** Si une suite de fonctions **continues** converge **simplemment** vers une fonction **continue**, la convergence n'est pas nécessairement uniforme.

On peut par exemple considérer l'exemple suivant dû à Cantor : la suite de fonctions de terme général :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

converge simplement vers la fonction nulle (traiter à part le cas  $x = 0$ ) qui est bien continue. Pourtant, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(1/n) = 1$  donc la convergence ne peut être uniforme.

**Théorème 1.3 Interversion limite / primitive**

Soient  $(g_n)$  une suite de fonctions continues sur un **intervalle**  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $a \in I$ . On suppose que  $(g_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers une fonction  $g$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, G_n : x \in I \mapsto \int_a^x g_n(t) dt \quad \text{et} \quad G : x \in I \mapsto \int_a^x g(t) dt$$

Alors  $(G_n)$  converge uniformément vers la fonction  $G$  sur tout segment de  $I$ .

**Corollaire 1.1 Intersion limite / intégration**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur un **segment**  $[a, b]$  convergeant **uniformément** sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

**REMARQUE.** Il s'agit à nouveau d'un théorème d'intersion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$



**ATTENTION!** A nouveau, la condition de convergence uniforme n'est pas décorative. Considérons  $f_n : x \in [0, \pi/2] \mapsto (n+1) \cos^n(x) \sin(x)$ . La suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, \pi/2]$  (traiter à part le cas  $x = 0$ ) mais pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = 1$$

**Théorème 1.4 Intersion limite / dérivation**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions **de classe**  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si

- $(f_n)$  converge **simplement** vers une fonction  $f$  sur  $I$ ;
- $(f'_n)$  converge **uniformément** vers une fonction  $g$  sur tout segment de  $I$ .

Alors

- $(f_n)$  converge **uniformément** vers  $f$  sur tout segment de  $I$ ;
- $f$  est de **classe**  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ;
- $f' = g$ .

**REMARQUE.** Il s'agit bien d'un théorème d'intersion dans le sens où

$$\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$$

**Corollaire 1.2**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si

- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $(f_n^{(j)})$  converge simplement sur  $I$ ;
- $(f_n^{(k)})$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Alors

- la limite simple  $f$  de  $(f_n)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ;
- pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , la suite  $(f_n^{(j)})$  converge uniformément vers  $f^{(j)}$  sur tout segment de  $I$ .

## 2 Séries de fonctions

### 2.1 Modes de convergence

#### Définition 2.1 Série de fonctions

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ , on note  $\sum f_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  est appelée la somme partielle de rang  $n$  de la série  $\sum f_n$ .

#### Définition 2.2 Convergence simple

On dit qu'une série de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  converge simplement sur  $A$  si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur  $A$ .

**REMARQUE.** Si la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $A$ .

#### Définition 2.3 Reste

Si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$ , la fonction  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$  est bien définie sur  $A$  et est appelée reste de rang  $n$  de la série  $\sum f_n$ .

#### Définition 2.4 Convergence uniforme

On dit qu'une série de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  converge uniformément sur  $A$  si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur  $A$ .

**REMARQUE.** Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$ , alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $A$ .

#### Exemple 2.1

Posons  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^n}{n!}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  converge et a pour somme  $e^x$ . Ainsi la série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge simplement et a pour somme la fonction  $\exp$ .

Par contre,  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$  puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|f_n\|_{\infty} = +\infty$  et donc  $(f_n)$  ne peut évidemment converger vers la fonction nulle.

#### Exercice 2.1

Soit  $f_n : x \mapsto x^n$ .

1. Sur quelle partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  la série  $\sum f_n$  converge-t-elle simplement ?
2. La série  $\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $I$  ? sur les segments de  $I$  ?

**Proposition 2.1**

Une série de fonctions converge uniformément sur  $A$  si et seulement si

- elle converge simplement sur  $A$
- et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle sur  $A$ .

**Définition 2.5 Convergence normale**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ . On dit que la série  $\sum f_n$  converge **normalement** sur  $A$  si  $\sum \|f_n\|_\infty$  converge.

**Rappel** Convergence absolue

Soit  $\sum u_n$  une série de termes à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . On dit que  $\sum u_n$  converge **absolument** si la série  $\sum |u_n|$  converge.

**Proposition 2.2**

Si une série de fonctions converge **normalement** sur  $A$ , alors elle converge **uniformément** sur  $A$  et **absolument** en tout point de  $A$ .

**REMARQUE.** On peut alors préciser que si  $\sum f_n$  converge normalement, alors  $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ .



**ATTENTION!** La réciproque est fautive : une série de fonctions peut converger uniformément sans converger normalement.

**Exemple 2.2**

Soit  $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$ . Alors la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge normalement sur  $\mathbb{R}$ . En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$  et  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge.

**2.2 Comparaison série / intégrale****Méthode** Comparaison série-intégrale

On rappelle que si  $f$  est une fonction continue par morceaux et décroissante sur  $[N, +\infty[$  telle que  $\int_N^{+\infty} f(t) dt$  converge, alors la série  $\sum f(n)$  converge et

$$\int_N^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{+\infty} f(t) dt$$

**Exercice 2.2 Fonction  $\zeta$  d'Euler**

$$\text{Soit } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Quel est le domaine de définition  $D$  de  $\zeta$ ?
2. La série de fonctions définissant  $\zeta$  converge-t-elle uniformément sur  $D$ ? sur tout segment de  $D$ ?

**Exemple 2.3 Equivalent de la fonction  $\zeta$  en 1**

On rappelle que  $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  est définie sur  $]1, +\infty[$ . Soit  $x > 1$ . La fonction  $f : t \mapsto \frac{1}{t^x}$  est continue et décroissante sur  $[1, +\infty[$ .

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} dt \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

ou encore

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

On en déduit que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1} + \mathcal{O}(1)$$

En particulier,

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

**2.3 Séries alternées****Rappel** Séries alternées

Soit  $\sum (-1)^n u_n$  une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, c'est-à-dire que  $(u_n)$  est une suite réelle décroissant vers 0. Si on note  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ , alors  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ .

**Exemple 2.4**

On considère la série de fonctions  $\sum f_n$  avec  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ . Si on fixe  $x \in \mathbb{R}^*$ , la série  $\sum f_n(x)$  converge car elle vérifie le critère des séries alternées. Autrement dit, la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, si

$$\text{on pose } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

ou encore  $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$ . On en déduit que  $(R_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Ainsi la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 2.3**

On considère  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n}$ . Montrer que  $\sum f_n$  converge uniformément mais pas normalement sur  $[0, 1]$ .



## 2.4 Théorèmes d'interversion

### Théorème 2.1 Théorème de la double limite

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  **convergeant uniformément** vers  $f$  sur  $A$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ .  
Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  possède une limite **finie**  $\ell_n \in \mathbb{K}$  en  $a$ , alors

- la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ell_n$  converge ;
- $\lim_a f = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ .

**REMARQUE.** Le résultat reste valide si  $a = \pm\infty$  (dans ce cas  $A$  doit être une partie de  $\mathbb{R}$  non majorée ou non minorée).

### Exemple 2.5 Limite en $+\infty$ de la fonction $\zeta$

Posons  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$  et  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ . En tant que série de Riemann, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [2, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$

Or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc la série  $\sum f_n$  converge normalement (et donc uniformément) sur  $[2, +\infty[$ . De plus,  $\lim_{+\infty} f_n = \delta_{1,n}$  donc  $\lim_{+\infty} \zeta = 1$ .

### Exemple 2.6

Posons  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  ne peut converger uniformément sur  $]1, +\infty[$ . En effet, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{1^+} f_n = \frac{1}{n}$  mais la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$  diverge.

### Exercice 2.4

Montrer que

$$\zeta(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

### Exemple 2.7 Limite en $1^+$ de la fonction $\zeta$

Posons à nouveau  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$  et  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ . La série  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $]1, +\infty[$  donc on ne peut pas utiliser le théorème de la double limite. Néanmoins,  $\zeta$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$  en tant que somme d'une série de fonctions décroissantes. La fonction  $\zeta$  admet donc une limite en  $1^+$ . Fixons  $N \in \mathbb{N}^*$ .

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \zeta(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}$$

Par passage à la limite,

$$\lim_{1^+} \zeta \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ , on obtient  $\lim_{1^+} \zeta = +\infty$ .

**Exercice 2.5**

On pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ .

1. Quel est le domaine de définition  $D$  de  $f$  ?
2. La série de fonctions définissant  $f$  converge-t-elle uniformément sur  $D$  ? sur tout segment de  $D$  ?

**Théorème 2.2 Transfert de continuité**

Si  $\sum f_n$  est une série de fonctions **continues** sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  convergeant **uniformément** vers  $f$  sur tout segment de  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**REMARQUE.** A nouveau, si  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  et si  $\sum f_n$  est une série de fonctions continues convergeant uniformément vers  $f$  sur chacun des  $A_i$ , alors  $f$  est continue sur  $A$ .

**Exemple 2.8 Continuité de la fonction  $\zeta$** 

Posons  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$  et  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ . En tant que série de Riemann, la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ . Soit  $a \in ]1, +\infty[$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est continue sur  $[a, +\infty[$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty[, |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^a}$$

Or  $\sum \frac{1}{n^a}$  converge donc la série  $\sum f_n$  converge normalement (et donc uniformément) sur  $[a, +\infty[$ . On en déduit que  $\zeta$  est continue sur  $[a, +\infty[$ .

Comme  $]1, +\infty[ = \bigcup_{a>1} [a, +\infty[$ ,  $\zeta$  est continue sur  $]1, +\infty[$ .

**Théorème 2.3 Interverson série / primitive**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions continues sur un **intervalle**  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $a \in I$ . On suppose que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n : x \in I \mapsto \int_a^x f_n(t) dt \quad \text{et} \quad F : x \in I \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

Alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} F_n$  converge uniformément vers la fonction  $F$  sur tout segment de  $I$ .

**Corollaire 2.1 Interverson série / intégration**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions continues sur un **segment**  $[a, b]$  convergeant **uniformément** sur  $[a, b]$ . Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

**Exercice 2.6**

Soit  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| \neq r$ . Calculer  $\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta} d\theta}{re^{i\theta} - z}$ . On distinguera les cas  $|z| < r$  et  $|z| > r$ .

**Théorème 2.4 Interversión série / dérivation**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions **de classe**  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge **simplement** sur  $I$ ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$  converge **uniformément** sur tout segment de  $I$ .

Alors

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  converge **uniformément** sur tout segment de  $I$ ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de **classe**  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ;
- $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$ .

**Corollaire 2.2**

Soit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une série de fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Si

- pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$ ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment de  $I$ .

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ;
- pour tout  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n^{(j)}$  converge uniformément vers  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)}$  sur tout segment de  $I$ .

**Exemple 2.9** La fonction  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ 

Posons  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$  et  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ . La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$  converge simplement sur  $]1, +\infty[$ . Les fonctions  $f_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]1, +\infty[, f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

Fixons  $a \in ]1, +\infty[$ .

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, +\infty[, |f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$

Or pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$  converge (série de Bertrand, classique quoique hors programme). Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n^{(k)}$  converge normalement et donc uniformément sur  $[a, +\infty[$ . On en déduit que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, +\infty[$ . Comme  $]1, +\infty[ = \bigcup_{a>1} [a, +\infty[$ ,  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ . De plus,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in ]1, +\infty[, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

### 3 Approximation uniforme

**Théorème 3.1** Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier

Soit  $f$  une fonction **continue par morceaux** sur un **segment**  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Alors il existe une suite  $(\varphi_n)$  de fonctions **en escalier** sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  **convergeant uniformément** vers  $f$ .

**REMARQUE.** Si on note  $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions en escalier sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , ceci signifie que  $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$  est **dense** dans  $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$  pour la norme uniforme.

**Exercice 3.1** ★★★**Lemme de Riemann-Lebesgue**

On considère un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et un espace vectoriel normé de dimension finie  $E$ .

1. Soit  $\varphi$  une fonction en escalier sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} \varphi(t) dt = 0$$

2. Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

3. Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $E$ . Montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) dt = 0$$

**Théorème 3.2 Théorème de Weierstrass**

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un **segment**  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Alors il existe une suite  $(P_n)$  de fonctions **polynomiales** sur  $[a, b]$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  **convergeant uniformément** vers  $f$ .

**REMARQUE.** A nouveau, ceci signifie que l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[a, b]$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est **dense** dans  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$  pour la norme uniforme.