Ensembles et applications

1 Applications : définitions ensemblistes

Définition 1.1 Application

Soient E et F deux ensembles. On appelle application de E dans F un objet mathématique f qui à tout élément x de E associe un élément $f(x)$ de F. Une telle application est notée $f : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$.
E et F s'appellent respectivement **ensemble de départ** et **ensemble d'arrivée** de f.

Exemple 1.1

$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & |z| \end{cases}$ est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$.

$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{cases}$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque. Une application n'a pas toujours comme ensembles d'arrivée et de départ des ensembles de réels ou même de nombres. On pourrait par exemple considérer E l'ensemble des élèves de la classe, F l'ensemble des entiers naturels et f l'application de E dans F qui à un élève associe son âge.

Définition 1.2 Image et antécédent

Soit f une application de E dans F.

- Soit $x \in \mathrm{E}$. $f(x)$ s'appelle l'**image** de x par f.
- Soit $y \in \mathrm{F}$. S'il existe x tel que $y = f(x)$, x est appelé un **antécédent** de y par f.

Remarque. Un élément de E admet toujours une unique image par f.
Un élément de F peut admettre zéro, un ou plusieurs antécédents par f.

Exemple 1.2

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$.

- 2 admet pour image 4 par f.
- -1 n'admet aucun antécédent par f.
- 0 admet 0 comme unique antécédent par f.
- 4 admet 2 et -2 comme antécédents par f.

Attention ! Il ne faut surtout pas confondre f et $f(x)$.
f est une application tandis que $f(x)$ est un élément.
Par exemple, on parlera de l'application (ou de la fonction) sin mais jamais de l'application (ou de la fonction) $\sin x$.
De même, on peut parler de l'application (ou de la fonction) $x \mapsto x^2\cos(x^3)$ mais pas de l'application (ou de la fonction) $x^2\cos(x^3)$.
Si vous faites la confusion entre ces deux écritures, c'est que vous n'avez sans doute rien compris à ce qu'est une application (ou une fonction).

Définition 1.3 Graphe

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. On appelle **graphe** de f l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in \mathrm{E}\} = \{(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}, y = f(x)\}$$

C'est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Remarque. Γ est le graphe d'une application de E dans F si et seulement si Γ est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ et si

$$\forall x \in \mathrm{E}, \exists! y \in \mathrm{F}, (x, y) \in \Gamma$$

Définition 1.4 Image d'une application

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. On appelle **image** de f l'ensemble noté $\mathrm{Im}(f)$ des images des éléments de E i.e. des éléments de F qui ont un antécédent par f dans E. Plus formellement

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathrm{F} \mid \exists x \in \mathrm{E}, y = f(x)\} = \{f(x), x \in \mathrm{E}\}$$

Remarque. Si on vous demande de montrer qu'une application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$ est bien définie, il s'agit de montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $f(x) \in \mathrm{F}$, autrement dit que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{F}$. Par exemple, l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}\right.$ est mal définie tandis que $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}\right.$ est bien définie.

Différence entre application et fonction

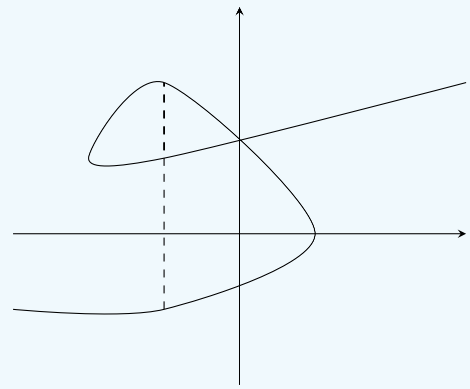
Bien que le programme officiel stipule de ne pas faire de différence entre applications et fonctions, il existe néanmoins une nuance. Une application est toujours définie sur son ensemble de départ, ce qui n'est pas le cas d'une fonction. Par exemple, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$ est une fonction mais pas une application. En revanche, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$ est bien une application.
Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une fonction, on appelle **ensemble de définition** de f l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $f(x)$ est défini. On le note généralement D_f. Par exemple, si f est la fonction racine carrée, l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

Représentation graphique

Si f est une application (resp. une fonction) dont l'ensemble de départ (resp. l'ensemble de définition) E est une partie de $\mathbb{R}$ (typiquement un intervalle) et dont l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$ (ou une partie de $\mathbb{R}$), on peut représenter graphiquement le graphe de f. Si on munit le plan d'un repére (orthonormé), l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x décrit E est une «courbe» du plan.

Exemple 1.3

La courbe ci-contre n'est pas un graphe d'application ou de fonction. En effet, l'argument x est associé à plusieurs valeurs, ce qui contredit la contrainte imposée sur un graphe (un élément de l'espace de départ n'a qu'une image dans l'espace d'arrivée).



Notation 1.1 Ensemble des applications

L'ensemble des applications d'un ensemble E dans un ensemble F se note F^E.

Notion de famille

Soient E et I deux ensembles. Une application de I dans E est aussi appelée une **famille** d'éléments de E indexée sur I. En particulier, l'ensemble des familles d'éléments de E indexées sur I se note E^I.
Les notions de famille et d'application sont deux visions du même objet. Une application est la manière de passer d'un ensemble à un autre tandis qu'une famille est une «collection d'objets».

Exemple 1.4

Une suite de réels est au choix une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée sur $\mathbb{N}$ ou une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des suites réelles se note donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque. Un n-uplet d'un produit cartésien E^n peut être vu comme une famille d'éléments de E indexée sur un ensemble à n éléments.

Définition 1.5 Egalité d'applications

Deux applications f et g sont égales si elles ont même ensembles de départ E et d'arrivée F et même graphe Γ. L'égalité des graphes est équivalente à la condition suivante :

$$\forall x \in E, f(x) = g(x)$$

Attention ! En toute rigueur, les applications $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ sont trois applications différentes puisque leur ensemble de départ ou d'arrivée diffère.
La première et la dernière ont pourtant le même graphe.

Fonction indicatrice

On considère un ensemble E. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit l'application $\mathbb{1}_A : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}\right.$ appelée **fonction indicatrice** de A.
Une fonction indicatrice caractérise complètement une partie de E dans le sens où si $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$$

On peut également prouver les relations suivantes :

- $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

On peut alors prouver des égalités d'ensembles uniquement par le calcul.

Exemple 1.5

Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A \cap (B \cup C)} &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B \cup C} \\ &= \mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C) \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{1}_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} &= \mathbb{1}_{A \cap B} + \mathbb{1}_{A \cap C} - \mathbb{1}_{A \cap B} \mathbb{1}_{A \cap C} \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{1}_{A \cap (B \cup C)} = \mathbb{1}_{(A \cap B) \cup (A \cap C)}$ et donc $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2 Composition

Définition 2.1 Composée d'applications

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. L'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}\right.$ est appelée la **composée de** f **suivie de** g et se note $g \circ f$.

Attention ! Dans la notation $g \circ f$, g précède f mais on applique d'abord f puis g. Cette convention de notation est due au fait que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
Quand on a deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on peut définir $g \circ f$ mais pas forcément $f \circ g$. En effet, l'ensemble d'arrivée de la première application doit être égal à (ou au moins inclus dans) l'ensemble de départ de la deuxième application.

Attention ! Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications et x un élément de E, les notations $g \circ f$, $f(x)$, $(g \circ f)(x)$ et $g(f(x))$ on un sens.
Par contre, les notations $g(f)$ et $f \circ x$ n'ont **AUCUN SENS**.
Pour alléger l'écriture, on note souvent $g \circ f(x)$ mais il faut bien comprendre que cette notation désigne $(g \circ f)(x)$ et non $g \circ (f(x))$ (aucun sens).

Remarque. Si f et g sont deux applications de E dans E, en général $f \circ g \neq g \circ f$.
Si $f \circ g = g \circ f$, on dit que f et g **commutent**.

Exemple 2.1

Les applications $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ ne commutent pas.

Les applications $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & iz \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^5 \end{array}\right.$ commutent.

Proposition 2.1 Associativité de la composition

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ et $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ trois applications. Alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

On peut donc noter $h \circ g \circ f$ sans parenthèses.

Définition 2.2 Application identique

Soit E un ensemble. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ est appelée **application identique** ou plus simplement **identité** de E. Elle se note Id_{E}.

Proposition 2.2 Elément neutre

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Alors

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{F}} \circ f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = f$$

3 Image directe, image réciproque

3.1 Image directe

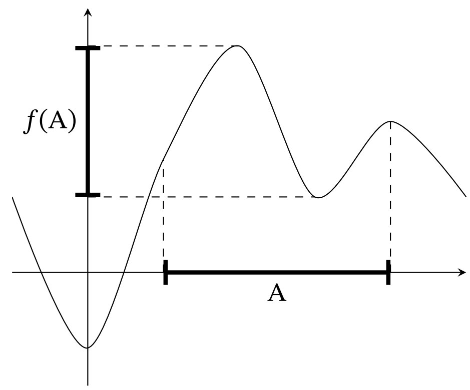
Définition 3.1 Image directe

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et A une partie de E. On appelle **image (directe)** de A par f, notée $f(\mathrm{A})$, l'ensemble des éléments de F qui sont images d'élément de A i.e. qui ont un antécédent dans A. Autrement dit,

$$f(\mathrm{A}) = \{f(x), x \in \mathrm{A}\} = \{y \in \mathrm{F} \mid \exists x \in \mathrm{A}, y = f(x)\}$$

Remarque.

Si f est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, on peut déterminer l'image d'une partie à partir du graphe de f. Pour cela, on place la partie A sur l'axe des abscisses et on projette sur l'axe des ordonnées la partie de la courbe située à la verticale de A.



Attention ! L'image par une fonction f d'un intervalle $[a, b]$ n'est pas en général l'intervalle $[f(a), f(b)]$. L'image d'un intervalle ouvert (resp. fermé) n'est pas forcément un intervalle ouvert (resp. fermé).

Exemple 3.1

- L'image par la fonction exp de $\mathbb{R}_+$ est l'intervalle $[1, +\infty[$.
- L'image par la fonction sin de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est l'intervalle $]-1, 1[$.
- L'image par la fonction sin de l'intervalle $]0, 2\pi[$ est l'intervalle $[-1, 1]$.

Exercice 3.1

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z-1} \end{array} \right.$. Déterminer $f(i\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{U})$.

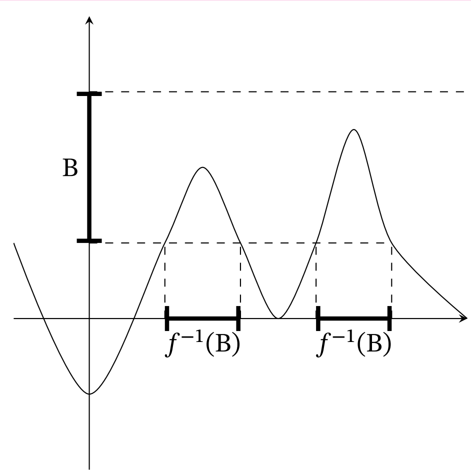
3.2 Image réciproque

Définition 3.2 Image réciproque

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et B une partie de F. On appelle **image réciproque** de B par f, notée $f^{-1}(\mathrm{B})$, l'ensemble des éléments de E qui sont antécédents d'éléments de B i.e. qui ont leur image dans B. Autrement dit,

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E} | f(x) \in \mathrm{B}\}$$

Si f est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, on peut déterminer l'image réciproque d'une partie à partir du graphe de f. Pour cela, on place la partie B sur l'axe des ordonnées et on projette sur l'axe des abscisses la partie de la courbe située à l'horizontale de B.



Exemple 3.2

- L'image réciproque de l'intervalle $[1, 2[$ par exp est l'intervalle $[0, \ln 2[$.
- L'image réciproque de $[4; +\infty[$ par la fonction carrée est $]-\infty, -2] \cup [2; +\infty[$.
- L'image réciproque de $\{0\}$ par la fonction sin est $\pi\mathbb{Z}$ (l'ensemble des multiples entiers de π).

Exercice 3.2

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z-1} \end{array} \right.$. Déterminer $f^{-1}(i\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\mathbb{U})$.

3.3 Inclusion, union et intersection

Proposition 3.1

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.

- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $f(\mathrm{A}) \subset f(\mathrm{B})$.
- Si $\mathrm{C} \subset \mathrm{D}$, alors $f^{-1}(\mathrm{C}) \subset f^{-1}(\mathrm{D})$.

Proposition 3.2

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, A et B deux parties de E, C et D deux parties de F.

$$f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B}) \qquad f(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \cup f(\mathrm{B})$$
$$f^{-1}(\mathrm{C} \cap \mathrm{D}) = f^{-1}(\mathrm{C}) \cap f^{-1}(\mathrm{D}) \qquad f^{-1}(\mathrm{C} \cup \mathrm{D}) = f^{-1}(\mathrm{C}) \cup f^{-1}(\mathrm{D})$$

Attention ! L'inclusion $f(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \cap f(\mathrm{B})$ peut être stricte. Prenons par exemple pour f la fonction carrée.

$$f([-2, 0]) \cap f([0, 2]) = [0, 4] \quad \text{mais} \quad f([-2, 0] \cap [0, 2]) = f(\{0\}) = \{0\}$$

4 Restriction et prolongement

Définition 4.1 Restriction, prolongement, corestriction

- Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est une application et A une partie de E. On appelle **restriction** de f à A l'application

$$f_{|\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

- Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et A un ensemble contenant E. On appelle **prolongement** de f à A toute application $g : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ telle que $g_{|\mathrm{A}} = f$.
- Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et B une partie de F telle que $\operatorname{Im} f \subset \mathrm{B}$. On appelle **corestriction** de f à B l'application

$$f^{|\mathrm{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

- Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, A une partie de E et B une partie de F telles que $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$. On peut alors définir

$$f_{|\mathrm{A}}^{|\mathrm{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Remarque. La restriction d'une application à une partie est unique mais on a en général plusieurs prolongements possibles d'une application à un même ensemble.

Exemple 4.1

L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ défine par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est un prolongement à $\mathbb{R}$ de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$.
On lui a ajouté la valeur 0 en 0. On aurait pu ajouter toute autre valeur réelle en 0 et on aurait obtenu un autre prolongement.

5 Injectivité, surjectivité et bijectivité

5.1 Injectivité

Définition 5.1 Injectivité

On dit qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **injective** ou que c'est une **injection** si l'une des propositions équivalentes suivantes est vraie :

- $\forall x, x' \in \mathrm{E}, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
- $\forall x, x' \in \mathrm{E}, \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$;
- tout élément de F possède **au plus** un antécédent par f.

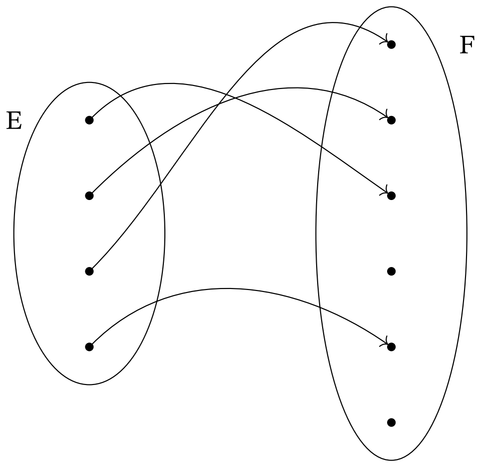
Exemple 5.1

L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$ est injective puisque si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $e^{x_1} = e^{x_2}$, alors $x_1 = x_2$.

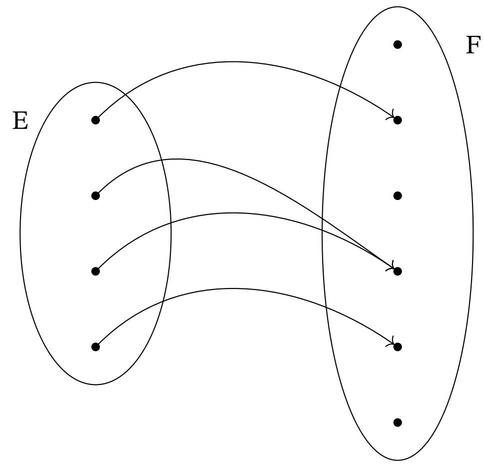
L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$ n'est pas injective puisque $e^0 = e^{2i\pi}$.

Remarque. La restriction d'une application injective est injective.

L'injectivité ou la non-injectivité peut se voir à l'aide de diagrammes. Une application est injective si tout élément de F reçoit au plus une flèche.

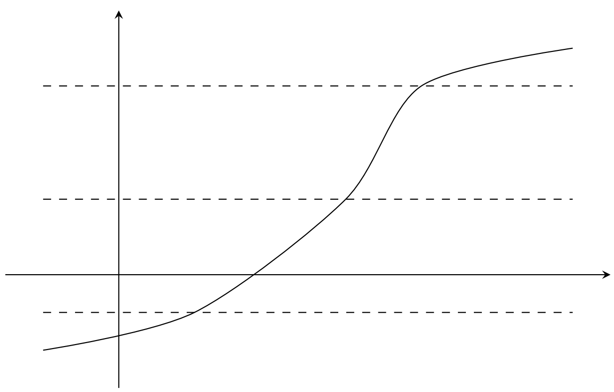


C'est une injection

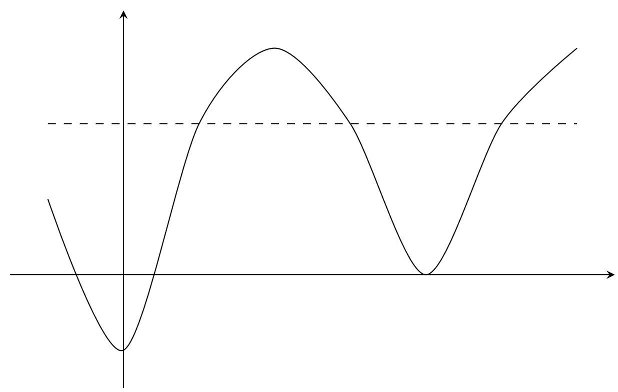


Ce n'est pas une injection

L'injectivité ou la non-injectivité peut également se voir à l'aide d'un graphe. Une application est injective si toute droite horizontale coupe le graphe en au plus un point, ce qui signifie que toute valeur y est prise au plus une fois.



C'est une injection
Aucun y n'a plusieurs antécédents



Ce n'est pas une injection
Certains y ont plusieurs antécédents

Méthode **Prouver l'injectivité en pratique**

On se sert la plupart du temps de la première caractérisation de l'injectivité. Pour prouver qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est injective, on commence donc la démonstration par «Soient $x, x' \in \mathrm{E}$ tels que $f(x) = f(x')$» et on montre que $x = x'$.

Exercice 5.1

Montrer que l'application $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}\right.$ est injective.

Proposition 5.1 Injectivité et stricte monotonie

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur A, alors f est injective.

Exemple 5.2

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective sur $\mathbb{R}$.
L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ n'est pas injective mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ l'est.
L'application $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas injective mais sa restriction à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'est.

Proposition 5.2 Injectivité et composition

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
- Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

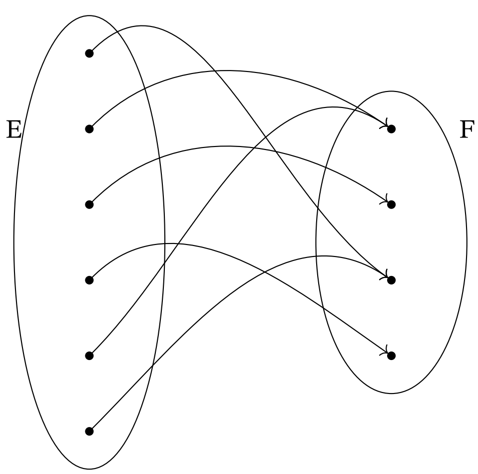
5.2 Surjectivité

Définition 5.2 Surjectivité

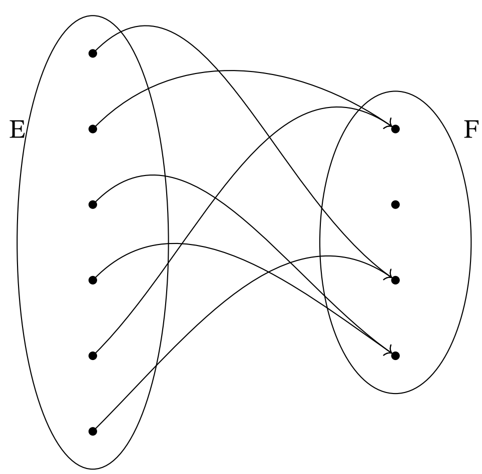
On dit qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **surjective** ou que c'est une **surjection** si l'une des propositions équivalentes suivantes est vraie :

- $\forall y \in \mathrm{F}, \quad \exists x \in \mathrm{E}, \quad y = f(x)$;
- $\operatorname{Im} f = \mathrm{F}$;
- tout élément de F possède **au moins** un antécédent par f.

La surjectivité ou la non-surjectivité peut se voir à l'aide de patates. Une application est surjective si tout élément de F reçoit au moins une flèche.

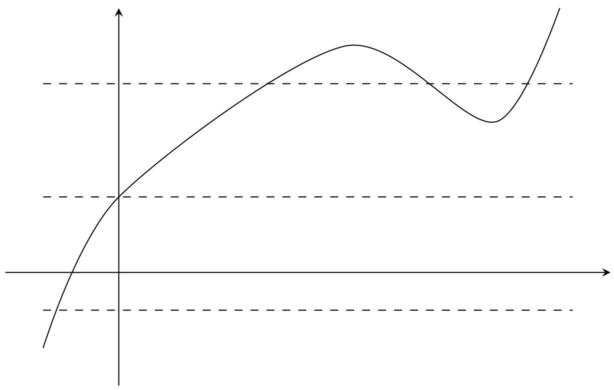


C'est une surjection

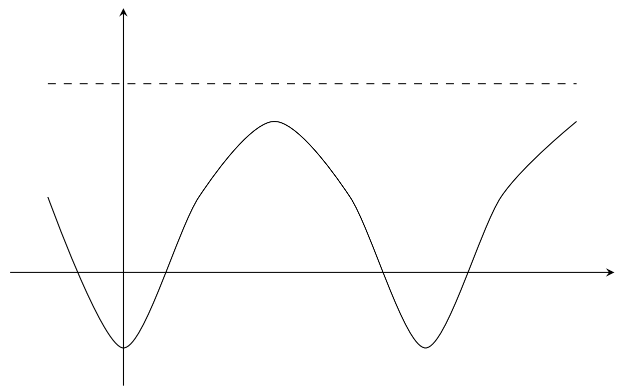


Ce n'est pas une surjection

La surjectivité ou la non-surjectivité peut également se voir à l'aide d'un graphe. Une application est surjective si toute droite horizontale coupe le graphe en au moins un point, ce qui signifie que toute valeur y est prise au moins une fois.



C'est une surjection
Tout y a un antécédent



Ce n'est pas une surjection
Certains y n'ont pas d'antécédent

Exemple 5.3

L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ n'est pas surjective mais sa corestriction à $\mathbb{R}_+$ l'est.

Méthode **Prouver la surjectivité en pratique**

On se sert la plupart du temps de la première caractérisation de la surjectivité. Pour prouver qu'une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est surjective, on commence donc la démonstration par «Soit $y \in \mathrm{F}$» et on cherche x tel que $y = f(x)$.

Exercice 5.2

Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}\right.$ est surjective.

Méthode **Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$**

Pour montrer la surjectivité d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une partie de $\mathbb{R}$, on peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires qui donne l'existence d'un antécédent.

Exemple 5.4

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas une surjection mais le théorème des valeurs intermédiaires permet de prouver que sa corestriction à $[-1, 1]$ l'est.

Proposition 5.3 Surjectivité et composition

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications.

- Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
- Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

5.3 Bijectivité

Définition 5.3 Bijectivité

On dit qu'une application $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **bijective** ou que c'est une **bijection** si l'une des propositions équivalentes suivantes est vraie.

- $\forall y \in \mathrm{F}, \quad \exists! x \in \mathrm{E}, \quad y = f(x)$.
- f est injective et surjective.
- tout élément de F possède un **unique** antécédent par f.

Exemple 5.5

Pour tout ensemble E, Id_{E} est une bijection.

Exemple 5.6

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}\right.$ une bijection.

Méthode **Montrer qu'une application est bijective**

Pour montrer que $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, on se donne $y \in \mathrm{F}$ et on montre que l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in \mathrm{E}$ admet une unique solution.

Exercice 5.3

Montrer que l'application $f: \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+i}{z-i} \end{array}\right.$ est une bijection.

Bijection induite

Soient $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{F})$ tels que $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$. On dit que f induit une bijection de A sur B si $f_{|\mathrm{A}}^{|\mathrm{B}}$ est bijective.

Exemple 5.7

Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est injective, f induit une bijection de E sur $\mathrm{Im}\, f$.

Méthode **Monter qu'une application induit une bijection**

Pour montrer qu'une application $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ induit une bijection de A sur B, on peut au choix :

- montrer que f est injective et que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$;
- montrer que tout élément de B admet un unique antécédent par f dans A (résolution d'une équation).

Exemple 5.8

Montrer que $z \mapsto \dfrac{z+1}{z-1}$ induit une bijection de $i\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

Théorème 5.1 Théorème de la bijection monotone

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle I. Alors f réalise une **bijection** de I sur l'intervalle $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$.
De plus, si $\mathrm{I} = [a, b]$, on a

- si f est croissante, $f(\mathrm{I}) = [f(a), f(b)]$;
- si f est décroissante, $f(\mathrm{I}) = [f(b), f(a)]$.

On a des résultats analogues si I est un intervalle ouvert ou semi ouvert (a et b pouvant être égaux respectivement à $-\infty$ et $+\infty$) avec éventuellement des limites. Par exemple, si f est une application continue et strictement croissante sur $\mathrm{I} =]a, b]$, f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I}) =]\lim_{a^+} f, f(b)]$.

Exemple 5.9

$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
sin induit une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
exp induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 5.4 Bijection réciproque

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une bijection. On appelle **bijection réciproque** de f l'application $f^{-1} : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f.

Exemple 5.10

$\mathrm{Id}_\mathrm{E}^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

Attention ! On a rencontré la notation f^{-1} dans deux contextes différents, à savoir les applications réciproques et les images réciproques. Si f n'est pas bijective, f^{-1} n'a pas de sens en tant qu'application mais $f^{-1}(\mathrm{B})$ est pourtant bien défini. Si f est bijective, f^{-1} a un sens en tant qu'application. Dans ce cas, $f^{-1}(\mathrm{B})$ peut à la fois désigner l'image réciproque de B par F et l'image directe de B par f^{-1}. Heureusement, les choses étant bien faites, ces deux interprétations de la même notation correspondent au même ensemble !

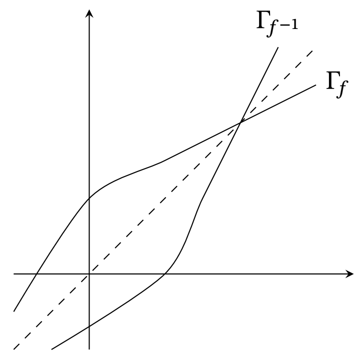
Proposition 5.4

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une bijection. Alors f^{-1} est une bijection de F sur E et vérifie :

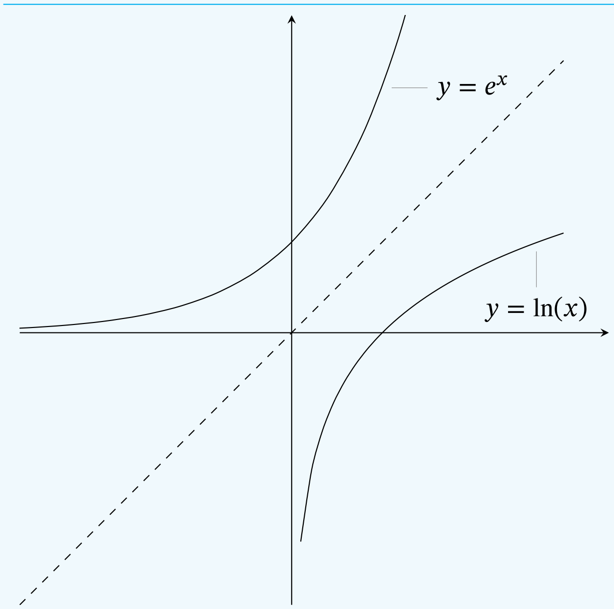
- $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$,
- $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_\mathrm{F}$,
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Interprétation en termes de graphes

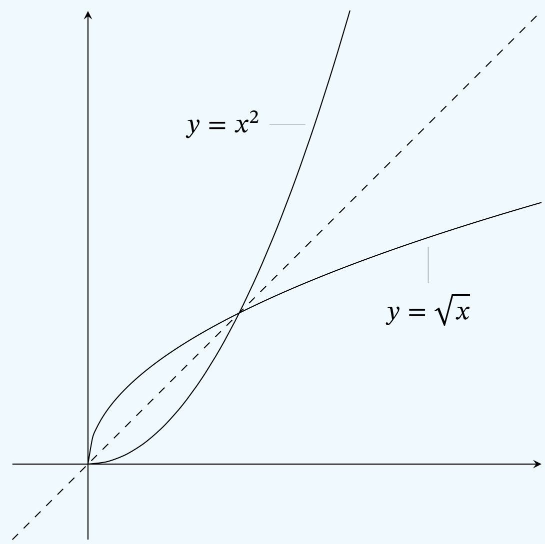
Supposons que $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}$. Alors les graphes des applications f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.



Exemple 5.11



La fonction exp induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de réciproque la fonction ln.



La fonction carrée induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ de réciproque la fonction racine carrée.

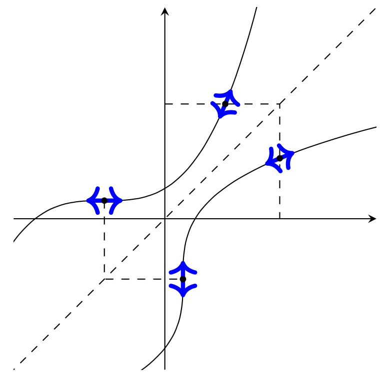
Théorème 5.2 Dérivabilité de la bijection réciproque

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une application bijective de I sur J où I et J sont deux intervalles. Si f est dérivable sur I et si f' **ne s'annule pas** sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque. On retrouve facilement l'expression de $(f^{-1})'$ en dérivant l'identité $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ (on dérive le membre de gauche comme une composée).

Interprétation géométrique

La pente de la tangente au point $(a, f(a))$ de la courbe représentative de f est l'inverse de la pente de la tangente au point $(f(a), a)$ de la courbe représentative de f^{-1}.
Si la première pente est nulle, la seconde est infinie : autrement dit, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$.



Théorème 5.3

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. Alors f est **bijective** si et seulement si il existe une application $g : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{G}}$. Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Exercice 5.4

Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Remarque. Une application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est appelée une **involution** de E. Elle est bijective et $f^{-1} = f$.

Exemple 5.12

Les applications $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \overline{\mathrm{X}} \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}\right.$ sont des involutions donc des bijections.

Méthode **Montrer qu'une application est bijective**

- Si on a idée de ce que va valoir f^{-1}, on donne un nom à cette application de F dans E, disons g et on montre que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$$

  On prouve que f est bijective de E sur F et même que $f^{-1} = g$.
- Si on n'a pas idée de ce que va valoir f^{-1} mais que f est donnée explicitement par une formule, on écrit «$y = f(x)$» et on essaie d'exprimer x en fonction de y. On aboutit alors à une expression du type $x = g(y)$. Si on a procédé par **EQUIVALENCE**, on a le droit de dire que f est bijective de réciproque g.
- Dans tous les autres cas, on démontre en deux temps que f est injective et surjective.

Proposition 5.5 Bijectivité et composition

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.