

# CONVEXITÉ

## 1 Fonctions convexes

Dans cette section,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

### Définition 1.1 Convexité

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application.

- On dit que  $f$  est **convexe** sur  $I$  si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

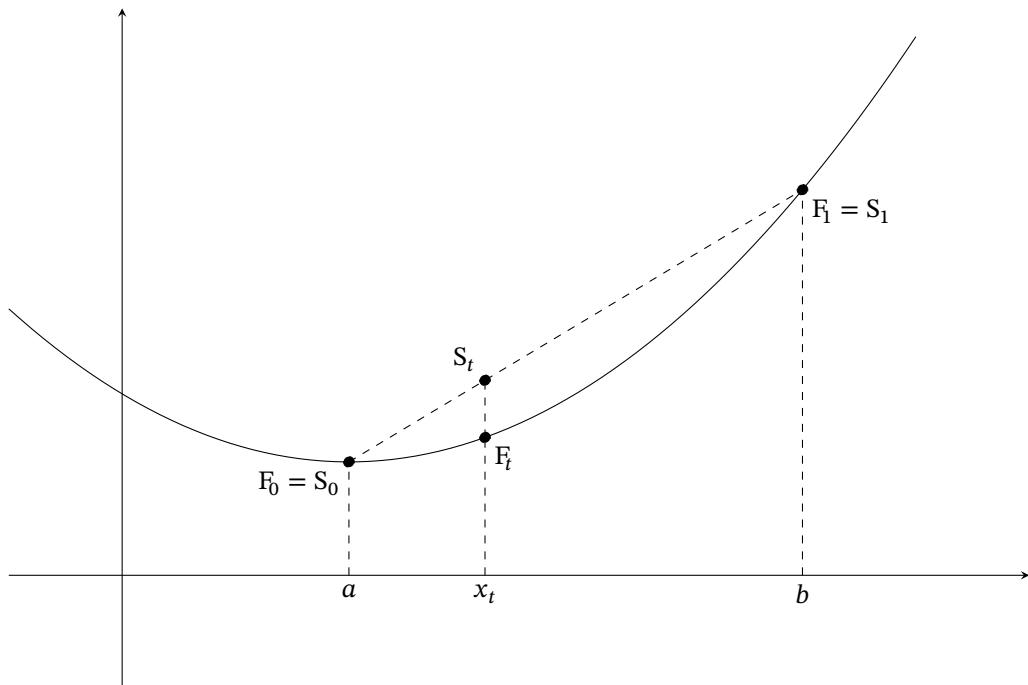
- On dit que  $f$  est **concave** sur  $I$  si :

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0, 1], f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$$

**REMARQUE.** Pour tout  $t \in [0, 1]$ , le réel  $(1-t)a + tb$  est compris entre  $a$  et  $b$  et appartient donc à  $I$  puisque  $I$  est un intervalle.

**REMARQUE.** Une application  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $-f$  est convexe sur  $I$ .

### Interprétation graphique de la convexité



Soit  $(a, b) \in I^2$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , posons  $x_t = (1 - t)a + tb$  et notons

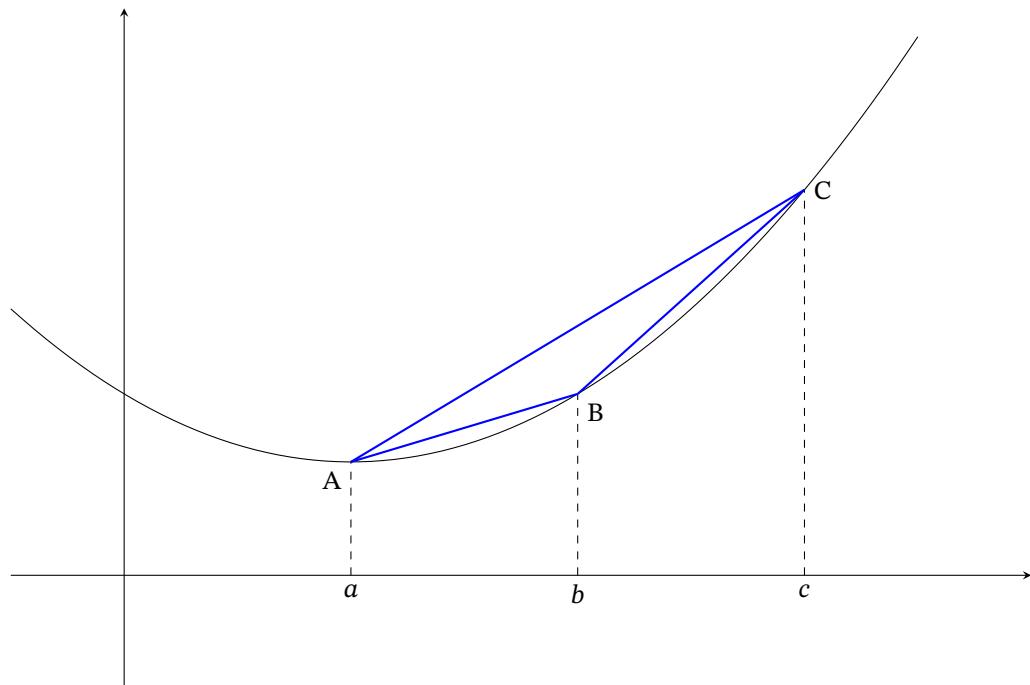
- $F_t$  le point du graphe de  $f$  d'abscisse  $x_t$ ;
- $S_t$  le point du segment  $[F_0 F_1]$  d'abscisse  $x_t$ .

Lorsque  $t$  décrit  $[0, 1]$ ,  $S_t$  décrit le segment  $[F_0 F_1]$  et  $F_t$  décrit l'arc du graphe compris entre  $F_0$  et  $F_1$ . La condition de convexité dit simplement que  $F_t$  est toujours situé **au-dessous** de  $S_t$ . Géométriquement, tout arc du graphe de  $f$  est situé **au-dessous** de la corde correspondante.

De manière similaire, dire que  $f$  est concave signifie tout arc du graphe de  $f$  est situé **au-dessus** de la corde correspondante.

### Proposition 1.1 Croissance des pentes

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  est convexe si et seulement si  $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante.

**Interprétation graphique de l'inégalité des trois pentes**

L'inégalité des trois cordes s'interprète de la manière suivante

$$\text{pente de la corde AB} \leq \text{pente de la corde AC} \leq \text{pente de la corde BC}$$

**Régularité d'une fonction convexe**

Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ . L'inégalité des trois cordes montre que le taux de variation en un point  $a \in I$  est croissant sur  $I$ . Le théorème de la limite monotone permet d'affirmer que le taux de variation en  $a$  admet une limite finie à gauche et à droite si  $a \in \mathring{I}$ . Ainsi  $f$  est dérivable à gauche et à droite sur  $\mathring{I}$  et donc a fortiori continue sur  $\mathring{I}$ . Néanmoins,  $f$  n'est pas nécessairement continue sur  $I$  si  $I$  est fermé : il peut y avoir discontinuité au extrémités de  $I$ .

## 2 Lien avec la dérivabilité

**Proposition 2.1**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable sur  $I$ .

- (i)  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est croissante sur  $I$ .
- (ii)  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $f'$  est décroissante sur  $I$ .

**Corollaire 2.1**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application deux fois dérivable sur  $I$ .

- (i)  $f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si  $f'' \geq 0$  sur  $I$ .
- (ii)  $f$  est concave sur  $I$  si et seulement si  $f'' \leq 0$  sur  $I$ .

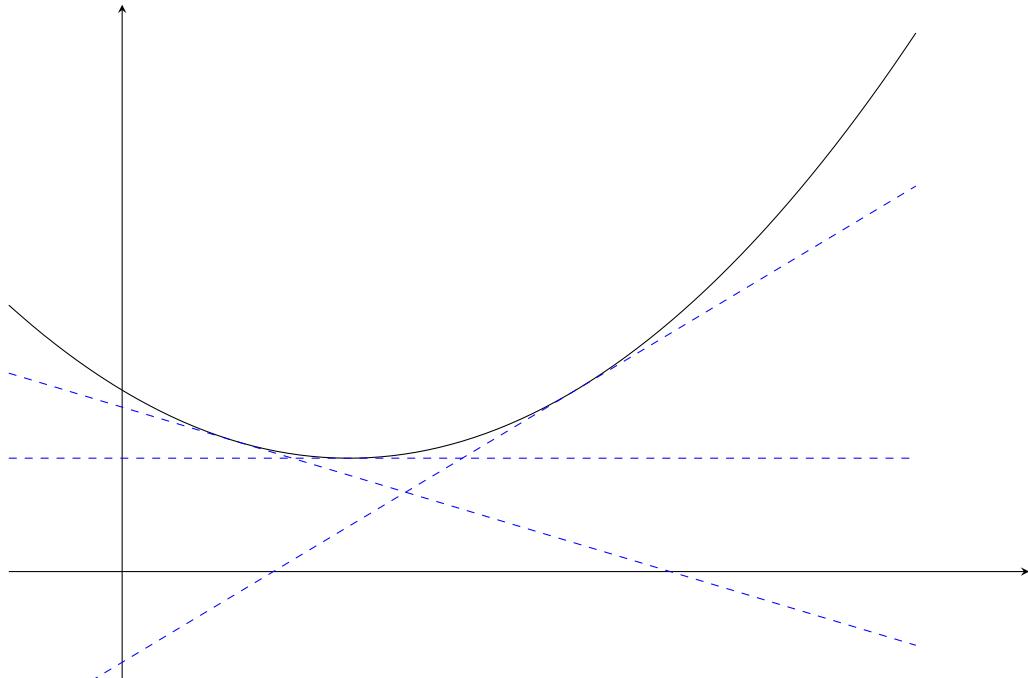
**Exemple 2.1**

- $\ln$  est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- $\sin$  est concave sur  $[0, \pi]$ .
- $\cos$  est concave sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .
- $\tan$  est convexe sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
- $\arcsin$  est convexe sur  $[0, 1]$ .
- $\arccos$  est concave sur  $[0, 1]$ .
- $\arctan$  est concave sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Proposition 2.2 Position par rapport aux tangentes**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application dérivable sur  $I$ .

1. Si  $f$  est convexe sur  $I$ , alors pour tout  $(a, x) \in I^2$ ,  $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$ .
2. Si  $f$  est concave sur  $I$ , alors pour tout  $(a, x) \in I^2$ ,  $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ .

**Interprétation graphique**

Le graphe de  $f$  est situé au-dessus de ses tangentes.

**Exemple 2.2**

- $\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x.$
- $\forall x \in [-\pi, \pi], |\sin x| \leq |x|.$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, |\tan x| \geq |x|.$
- $\forall x \in [-1, 1], |\arcsin x| \geq |x|.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan x| \leq |x|.$

### 3 Convexité généralisée et applications

A nouveau, désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.1 Convexité généralisée**

Soient  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in I^n$  et  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in (\mathbb{R}_+)^n$  tel que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ .

(i) Si  $f$  est convexe, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

(ii) Si  $f$  est concave, alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

**REMARQUE.** La définition de la convexité correspond au cas  $n = 2$ .

**REMARQUE.** Pour tout  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}_+^n$  tel que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ , le réel  $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$  est compris entre  $\min_{1 \leq k \leq n} x_k$  et  $\max_{1 \leq k \leq n} x_k$  et appartient donc à  $I$  puisque  $I$  est un intervalle.

**Inégalités de moyennes**

Soit  $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ .

- $H_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}$  s'appelle la **moyenne harmonique** des réels  $x_1, \dots, x_n$ .
- $G_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}}$  s'appelle la **moyenne géométrique** des réels  $x_1, \dots, x_n$ .
- $A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$  s'appelle la **moyenne arithmétique** des réels  $x_1, \dots, x_n$ .

En utilisant la concavité du logarithme, on prouve :

$$H_n \leq G_n \leq A_n$$