# Espaces vectoriels de dimension finie

## 1 Familles de vecteurs

### 1.1 Opérations sur une famille engendrant un sous-espace vectoriel

**Lemme 1.1**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A et B deux parties de E. Alors

$$\text{vect(A)} = \text{vect(B)} \iff \text{A} \subset \text{vect(B)} \text{ et } \text{B} \subset \text{vect(A)}$$

**Proposition 1.1**

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Alors $\text{vect}(u_i)_{i\in I}$ n'est pas modifié si on effectue les opérations suivantes sur la famille $(u_i)_{i\in I}$ :

(i) permutation des $u_i$ ;

(ii) multiplication de l'un des $u_i$ par un scalaire non nul ;

(iii) ajout à l'un des $u_i$ une combinaison linéaire des autres vecteurs ;

(iv) suppression d'un $u_i$ combinaison linéaire des autres vecteurs (notamment les $u_i$ nuls) ;

(v) adjonction d'un vecteur combinaison linéaire des $u_i$.

**Définition 1.1 Pivot de Gauss**

Les opérations (i), (ii), (iii) de la proposition précédente seront appelées opérations du pivot de Gauss.

**Exercice 1.1**

Soient $a = (1, 2, 1)$, $b = (1, 3, 2)$, $c = (1, 1, 0)$ et $d = (3, 8, 5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\text{vect}(a, b) = \text{vect}(c, d)$.

### 1.2 Familles génératrices

**Définition 1.2 Famille génératrice**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une **famille génératrice** de E ou encore qu'elle **engendre** E si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $u_i$, autrement dit si $\text{vect}(u_i)_{i\in I} = E$.

**Remarque.** L'espace vectoriel $\{0\}$ admet la famille vide pour famille génératrice puisqu'on a vu que $\text{vect}(\varnothing) = \{0\}$.

**Exemple 1.1**

Trois vecteurs non coplanaires de l'espace engendre l'espace vectoriel.

**Exemple 1.2**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, …, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre $\mathbb{K}^n$.

**Exemple 1.3**

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

**Proposition 1.2**

Une famille génératrice reste génératrice si :

(i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;

(ii) on lui ajoute un vecteur (i.e. une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice) ;

(iii) on lui enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (notamment un vecteur nul).

**Méthode** **Montrer qu'une famille est génératrice**

Pour montrer qu'une famille finie $(u_1, \dots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est génératrice, on se donne $x \in E$ et on montre qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.
Pour montrer qu'une famille infinie $(u_i)_{i \in I}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est génératrice, on se donne $x \in E$ et on montre qu'il existe $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ (famille presque nulle) telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$.

## 1.3 Familles libres, familles liées

**Définition 1.3 Famille libre, famille liée (cas d'une famille finie)**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n \in E$. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est **libre** ou encore que les $u_i$ sont **linéairement indépendants** si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est **liée** ou encore que les $u_i$ sont **linéairement dépendants**. De manière équivalente, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si et seulement si l'un des $u_i$ est combinaison linéaire des autres.

**Remarque.** La famille vide $\varnothing$ est toujours une famille libre.
Une famille qui contient le vecteur nul est liée.
Une famille qui contient plusieurs fois le même vecteur est liée.

**Attention !** Le contraire de «libre» n'est pas «génératrice» mais «liée».

**Méthode** **Montrer qu'une famille est libre**

Pour montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est libre, on se donne $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$ et on montre que tous les $\lambda_i$ sont nuls.

**Exemple 1.4**

Une famille à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
Une famille à deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.
Une famille à trois vecteurs est libre si et seulement si ces trois vecteurs sont non coplanaires.

**Exemple 1.5**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, …, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de $\mathbb{K}^n$.

**Exemple 1.6**

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

**Attention !** Quand on considère une famille de fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^I$, dire que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$ signifie que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0$ **pour tout** $x \in I$ (le premier zéro désigne la fonction nulle et le second désigne le zéro de $\mathbb{R}$).

**Exercice 1.2**

Montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

**Définition 1.4 Famille libre, famille liée (cas d'une famille quelconque)**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **libre** ou encore que les $u_i$ sont **linéairement indépendants** si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **liée** ou encore que les $u_i$ sont **linéairement dépendants**. De manière équivalente, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si l'un des $u_i$ est combinaison linéaire des autres.

**Remarque.** Pour montrer qu'une famille infinie est libre, il est donc équivalent de montrer que toute sous-famille finie de cette famille est libre.

**Remarque.** Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre et si $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ sont deux familles presque nulles de scalaires telles que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \sum_{i \in I} \mu_i u_i$, alors $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in I$.

**Exemple 1.7**

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

**Proposition 1.3**

Une famille libre reste libre si :

(i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;

(ii) on lui enlève un vecteur (une sous-famille d'une famille libre est libre) ;

(iii) on lui ajoute un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

Une famille liée reste liée si :

(i) on effectue les opérations du pivot de Gauss ;

(ii) on lui ajoute un vecteur (i.e. une sur-famille d'une famille liée est liée) ;

(iii) on lui enlève un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille ;

## 1.4 Bases

**Définition 1.5 Base**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_i)_{i\in I} \in E^I$. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une **base** de E si elle est à la fois génératrice de E et libre.

**Remarque.** La famille vide est une base de l'espace vectoriel nul.

**Exemple 1.8**

Une famille de trois vecteurs non coplanaires de l'espace est une base de l'espace vectoriel géométrique.

**Exemple 1.9**

$(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

**Exemple 1.10**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0 \dots, 0)$, …, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

**Exemple 1.11**

La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

**Attention !** Il n'y a pas unicité de la base pour un espace vectoriel donné.

**Définition 1.6 Coordonnées dans une base finie**

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $x \in \mathrm{E}$. On appelle **coordonnées** de $x$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ l'unique $n$-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

**Définition 1.7 Coordonnées dans une base quelconque**

Soit $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $x \in \mathrm{E}$. On appelle **coordonnées** de $x$ dans la base $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ l'unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{(\mathrm{I})}$ telle que $x = \sum_{i\in \mathrm{I}} \lambda_i e_i$.

**Proposition 1.4 Base d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe une base $\mathcal{F}$ de F et une base $\mathcal{G}$ de G. Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est une base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ si et seulement si F et G sont en somme directe.
Dans ce cas, $\mathcal{B}$ est dite **base adaptée** à la somme directe $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

**Attention !** Il est essentiel que F et G soient en somme directe. En effet, dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan vectoriel d'équation $x = 0$ et Q le plan vectoriel d'équation $y = 0$. Il est clair que $((0,1,0),(0,0,1))$ est une base de P et que $((1,0,0),(0,0,1))$ est une base Q. Or P et Q ne sont pas en somme directe puisque $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ est la droite vectorielle d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Et on voit bien que $((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0),(0,0,1))$ n'est pas une base puisqu'elle contient deux fois le même vecteur.

## 1.5 Cas particulier de $\mathbb{K}^n$

**Définition 1.8 Famille échelonnée de vecteurs de $\mathbb{K}^n$**

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $a_i$ (resp. $b_i$) le nombre de zéros initiaux (resp. terminaux) dans le vecteur $u_i$. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est **échelonnée** si une des suites finies $(a_1, \dots, a_n)$ ou $(b_1, \dots, b_n)$ est strictement monotone.

**Exemple 1.12**

Les vecteurs $(2,3,1,2)$, $(-2,1,0,0)$ et $(1,0,0,0)$ forment une famille échelonnée de $\mathbb{R}^4$.
Les vecteurs $(3,2,1,-1)$, $(0,2,-1,4)$, $(0,0,2,3)$ et $(0,0,0,0)$ forment une famille échelonnée de $\mathbb{R}^4$.

**Proposition 1.5 Liberté d'une famille échelonnée**

Une famille échelonnée de $\mathbb{K}^n$ est libre si et seulement si elle ne comporte pas le vecteur nul.

**Proposition 1.6**

Toute famille de $\mathbb{K}^n$ peut être transformée à l'aide des opérations du pivot de Gauss en une famille échelonnée.

**Méthode** **Montrer qu'une famille de $\mathbb{K}^n$ est libre ou liée**

Il suffit d'écrire la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille et de se ramener à une famille échelonnée en utilisant le pivot de Gauss sur les **colonnes**. Si le vecteur nul apparaît, c'est que la famille est liée. Sinon, elle est libre.

**Exemple 1.13**

Montrer que la famille $((1,2,1),(1,3,2),(1,1,0))$ est liée.
Montrer que la famille $((2,1,3,4),(1,3,2,0),(2,3,1,-1))$ est libre.

**Méthode** **Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$**

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

- Si F est donné sous forme cartésienne (i.e. à l'aide d'un système d'équations linéaires), la méthode «mettre sous forme d'un vect» vu dans le chapitre **Espaces vectoriels** fournit une base de F.
- Si F est donné sous forme paramétrique (i.e. à l'aide d'une famille génératrice), la méthode du pivot de Gauss fournit une base de F après suppression des éventuels vecteurs nuls.

# 2 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition 2.1 Dimension finie**

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

**Exemple 2.1**

Pour $n \geq 1$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie puisque sa base canonique est une famille génératrice finie.

**Exemple 2.2**

$\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. En effet, supposons qu'il admette une famille génératrice finie $(P_1,\dots,P_n)$. Posons $d = \max_{1\leq i\leq n} \deg P_i$. Alors $X^{d+1}$ n'est pas une combinaison linéaire des $P_i$.

## 2.1 Existence de bases

**Théorème 2.1**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre finie de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en lui ajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$.

**Corollaire 2.1 Existence de bases**

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède une base finie.

**Corollaire 2.2 Théorème de la base incomplète/extraite**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

(i) On peut compléter toute famille libre finie de E en une base de E.

(ii) On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.

**Exemple 2.3**

Soit $F = \text{vect}((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1))$. Alors $((1,-5,7),(2,6,8))$ est une base de F.

**Remarque.** Si on admet l'axiome du choix, les théorèmes précédents restent vraie en dimension infinie quitte à considérer des familles infinies.

## 2.2 Définition de la dimension

**Lemme 2.1**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possédant une famille génératrice à $n$ vecteurs. Alors toute famille libre de E comporte au plus $n$ vecteurs.

**Théorème 2.2 Dimension**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même nombre d'éléments. On appelle cet entier la **dimension** de E (sur $\mathbb{K}$) et on le note $\dim E$.

**Remarque.** La dimension de l'espace nul est 0.

**Remarque.** On appelle **droite vectorielle** un espace vectoriel de dimension 1 et **plan vectoriel** un espace vectoriel de dimension 2.

**Méthode Déterminer la dimension d'un espace vectoriel**

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit de déterminer **une** base de E. Son nombre d'éléments donnera la dimension.

**Exemple 2.4**

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel.
- L'ensemble des suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel.

**Exemple 2.5**

- $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

**Remarque.** Un ensemble E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel pour différents corps de base. La dimension peut alors différer suivant le corps de base. En cas d'ambiguïté, la dimension d'un espace vectoriel E pour le corps de base $\mathbb{K}$ est notée $\dim_{\mathbb{K}} E$.

**Exemple 2.6**

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

**Exercice 2.1**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que E peut être muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel et montrer que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E$.

**Corollaire 2.3**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

(i) Toute famille libre de E possède au plus $n$ vecteurs.

(ii) Toute famille génératrice de E possède au moins $n$ vecteurs.

(iii) Toute famille possédant strictement plus de $n$ vecteurs est liée.

**Attention !** Les réciproques sont fausses.

- Une famille d'un espace vectoriel de dimension $n$ possédant moins de $n$ vecteurs n'est pas forcément libre.
- Une famille d'un espace vectoriel de dimension $n$ possédant plus de $n$ vecteurs n'est pas forcément génératrice.
- Une famille liée peut possèder $n$ vecteurs ou moins.

**Corollaire 2.4**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathcal{B}$ une famille de $n$ vecteurs. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E ;

(ii) $\mathcal{B}$ est une famille libre de E ;

(iii) $\mathcal{B}$ est une base de E.

**Méthode** **Prouver qu'une famille est une base en dimension finie**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathcal{B}$ une famille à $n$ vecteurs. Pour prouver que $\mathcal{B}$ est une base de E, pas besoin de prouver que $\mathcal{B}$ est génératrice **et** libre. Le théorème précédent nous dit qu'il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est génératrice **ou** libre (en pratique, on montre plus souvent la liberté). Le travail est donc divisé par deux si on connaît la dimension de l'espace vectoriel.

**Exemple 2.7**

La famille $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**Proposition 2.1 Dimension d'un produit**

Soient $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\prod_{k=1}^{p} \mathrm{E}_k$ est de dimension finie et $\dim\left(\prod_{k=1}^{p} \mathrm{E}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{E}_k$.

# 3 Dimension et sous-espaces vectoriels

## 3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Proposition 3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors F est de dimension finie et $\dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{E}$. De plus, $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$ si et seulement si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$.

**Exemple 3.1**

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont le sous-espace nul, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$.

**Exemple 3.2 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1**

Soit (E) l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où $a \in \mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathrm{I}}$ de dimension 1.

**Exemple 3.3 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants**

Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et (E) l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ de dimension 2.

**Exemple 3.4 Récurrences linéaires homogènes**

Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.

**Méthode** **Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Pour montrer que $F = G$, il suffit de montrer que $F \subset G$ (ou $G \subset F$) et que $\dim F = \dim G$. Travail divisé par deux.

**Exercice 3.1**

Soient $a = (1,2,1)$, $b = (1,3,2)$, $c = (1,1,0)$ et $d = (3,8,5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\text{vect}(a,b) = \text{vect}(c,d)$.

**Définition 3.1 Hyperplan**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n$. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

## 3.2 Dimension d'une somme

**Proposition 3.2 Existence d'un supplémentaire**

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F possède **un** supplémentaire dans E.

**Attention !** On rappelle qu'il n'y a pas unicité du supplémentaire.

**Remarque.** Si on admet l'axiome du choix, l'existence d'un supplémentaire est également garantie en dimension infinie.

**Proposition 3.3 Dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie en somme directe d'un espace vectoriel E. Alors $F \oplus G$ est de dimension finie et $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

**Proposition 3.4 Formule de Grassmann**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors $F+G$ est de dimension finie et

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

**Exercice 3.2**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

**Corollaire 3.1 Caractérisation d'une somme directe**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.

**Corollaire 3.2 Caractérisation de la supplémentarité**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si **au moins deux** des trois assertions suivantes sont vraies :

(i) $\dim F + \dim G = \dim E$.

(ii) $F \cap G = \{0_E\}$.

(iii) $F + G = E$.

**Méthode** **Prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E. Si on connaît les dimensions de E, F et G, pour prouver que F et G sont supplémentaires dans E, il suffit de vérifier que $\dim F + \dim G = \dim E$ et de montrer, **au choix**, que $F \cap G = \{0_E\}$ **ou** $F + G = E$ (en pratique, on montre plus souvent que la somme est directe). Travail divisé par deux grâce à la dimension.

**Exercice 3.3**

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \text{vect}((0, 1, 0))$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

# 4 Rang d'une famille de vecteurs

**Définition 4.1 Rang d'une famille de vecteurs**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie). Soit $\mathcal{F}$ une famille **finie** de vecteurs de E. Alors $\text{vect}(\mathcal{F})$ est de dimension finie et sa dimension est appelée le **rang** de $\mathcal{F}$ noté $\text{rg}\,\mathcal{F}$.

**Proposition 4.1**

Le rang d'une famille finie de vecteurs est invariant par opérations de pivot de Gauss sur cette famille.

**Remarque.** Si $\mathcal{F}$ est une famille de $p$ vecteurs, alors $\text{rg}\,\mathcal{F} \leq p$.
Si E est de dimension finie $n$, $\text{rg}\,\mathcal{F} \leq n$.
Si ces deux conditions sont réunies, on a donc $\text{rg}\,\mathcal{F} \leq \min(n, p)$.

**Exercice 4.1**

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles finies d'un espace vectoriels E de dimension finie. Montrer que :

$$\max(\text{rg}\,\mathcal{F}_1, \text{rg}\,\mathcal{F}_2) \leq \text{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \leq \text{rg}\,\mathcal{F}_1 + \text{rg}\,\mathcal{F}_2$$

**Proposition 4.2 Rang, liberté, génération**

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de $p$ vecteurs d'un espace vectoriel E.
Alors $\text{rg}\,\mathcal{F} = \text{card}\,\mathcal{F}$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre.
Si de plus E est de dimension finie, $\text{rg}\,\mathcal{F} = \dim E$ si et seulement si $\mathcal{F}$ engendre E.

**Méthode** **Rang d'une famille de $\mathbb{K}^n$**

Soit $\mathcal{F}$ une famille de $\mathbb{K}^n$. On applique la méthode du pivot de Gauss pour déterminer une base de vect($\mathcal{F}$). Son cardinal est est le rang de $\mathcal{F}$.

**Exercice 4.2**

Déterminer le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ :

$$((1,2,-3,0),(-4,-6,12,2),(-3,-6,12,3),(-2,-4,6,0),(-2,-2,3,1))$$