Égalités et inégalités

1 Égalités

Définition 1.1 Identité

On appelle **identité** une égalité entre deux expressions qui est valable quelles que soient les valeurs des variables entrant en jeu dans ces expressions.

Exemple 1.1

En trigonométrie, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Les identités remarquables sont bien des identités :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{cases}$$

Remarque. Les expressions situées de part et d'autre du signe $=$ sont appelés les **membres** de l'égalité.

Méthode **Montrer une identité**

Pour montrer une identité, on part généralement du membre le plus «compliqué» pour arriver au plus «simple». Une simple suite d'égalités suffit. On n'utilisera pas d'équivalences logiques (ce n'est pas incorrect mais maladroit).
On peut également montrer que la différence des deux membres est nulle.

2 Inégalités

2.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Remarque. Les expressions situées de part et d'autre du signe $\leq$, $\geq$, $<$ ou $>$ sont appelés les **membres** de l'inégalité.

Proposition 2.1 Relation d'ordre

On dit que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle possède les propriétés suivantes.

Réflexivité Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a \leq a$.

Transitivité Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

Antisymétrie Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.

Remarque. Une inégalité **stricte** entre deux réels a et b est définie de la manière suivante :

$$a < b \iff (a \leq b \text{ ET } a \neq b)$$

ATTENTION ! On veillera à ne pas confondre inégalités larges et strictes. En effet, $a < b \implies a \leq b$ mais la réciproque fausse. On ne passera donc jamais d'une inégalité large à une inégalité stricte sans justification.

REMARQUE. D'un point de vue logique, la négation de «$a \leq b$» est «$a > b$».

Proposition 2.2 Compatibilité avec les opérations

On dit que la relation d'ordre est compatible avec l'addition et la multiplication dans le sens où :

- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \leq y \text{ ET } 0 \leq z) \Rightarrow xz \leq yz$.

On en déduit que :

- si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$,
- si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Proposition 2.3 Passage à l'opposé et à l'inverse

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Passage à l'opposé $x \leq y \iff -x \geq -y$.

Passage à l'inverse Si x et y sont non nuls et **de même signe**, $x \leq y \iff \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$.

ATTENTION ! On ne soustrait pas des inégalités membre à membre.

$$(x \leq y \text{ ET } a \leq b) \not\Longrightarrow x - a \leq y - b$$

Il est plus sage de passer à l'opposé puis d'additionner.
De même, on ne divise pas des inégalités membre à membre.

$$(x \leq y \text{ ET } a \leq b) \not\Longrightarrow \frac{x}{a} \leq \frac{y}{b}$$

Là aussi, il est plus sage de passer à l'inverse puis de multiplier (à condition que tous les membres soient positifs).

Méthode **Déterminer le signe d'une expression**

Pour déterminer le signe d'une expression, on essaie toujours de la **FACTORISER**. En effet, il est toujours plus facile de déterminer le signe d'un produit (ou d'un quotient) que d'une somme.
On peut éventuellement s'aider d'un tableau de signes.

REMARQUE. C'est en particulier la méthode à adopter lorsqu'on recherche le signe d'une dérivée.

2.2 Valeur absolue

Définition 2.1 Parties positive et négative

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On appelle **partie positive** de x le réel $x^+ = \max(0, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
- On appelle **partie négative** de x le réel $x^- = \max(0, -x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Dans tous les cas, $x = x^+ - x^-$.

Définition 2.2 Valeur absolue

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x le réel $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$.

Dans tous les cas, $x = x^+ + x^-$.

Proposition 2.4 Propriétés de la valeur absolue

- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |xy| = |x||y|$.

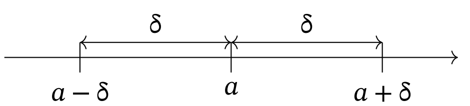
Proposition 2.5 Inégalités triangulaires

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

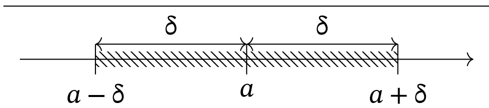
$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad\qquad |x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$$

La valeur absolue comme une distance

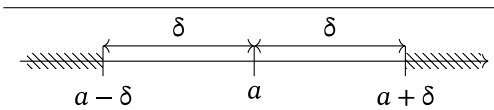
La quantité $|x - y|$ mesure la distance entre deux points x et y de la droite réelle.
Soient $(a, x) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}^+$.



$$|x - a| = \delta \iff (x = a - \delta \text{ OU } x = a + \delta)$$



$$|x - a| \leq \delta \iff a - \delta \leq x \leq a + \delta$$
$$|x - a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$$



$$|x - a| \geq \delta \iff (x \leq a - \delta \text{ OU } x \geq a + \delta)$$
$$|x - a| > \delta \iff (x < a - \delta \text{ OU } x > a + \delta)$$

Exercice 2.1 **Minimum et maximum de deux réels**

Si x et y sont deux réels, on note $\min\{x,y\}$ et $\max\{x,y\}$ respectivement le plus petit et le plus grand de ces deux réels. Montrer que

$$\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) \qquad \max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

2.3 Intervalles

Définition 2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
[a,b]&=\{x\in\mathbb{R},\ a\leq x\leq b\} & [a,+\infty[&=\{x\in\mathbb{R},\ a\leq x\}\\
]a,b]&=\{x\in\mathbb{R},\ a< x\leq b\} &]a,+\infty[&=\{x\in\mathbb{R},\ a< x\}\\
[a,b[&=\{x\in\mathbb{R},\ a\leq x< b\} &]-\infty,b]&=\{x\in\mathbb{R},\ x\leq b\}\\
]a,b[&=\{x\in\mathbb{R},\ a< x< b\} &]-\infty,b[&=\{x\in\mathbb{R},\ x< b\}
\end{aligned}$$

Exemple 2.1

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $\delta\in\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
&\{x\in\mathbb{R},\ |x-a|\leq\delta\}=[a-\delta,a+\delta] && \{x\in\mathbb{R},\ |x-a|<\delta\}=]a-\delta,a+\delta[\\
&\{x\in\mathbb{R},\ |x-a|\geq\delta\}=]-\infty,a-\delta]\cup[a+\delta,+\infty[&& \{x\in\mathbb{R},\ |x-a|>\delta\}=]-\infty,a-\delta[\cup]a+\delta,+\infty[
\end{aligned}$$

3 Équations et inéquations

Résoudre une équation ou une inéquation d'inconnue x consiste à trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ (ensemble des solutions) des x vérifiant l'équation ou l'inéquation. Autrement dit, on cherche à montrer l'**équivalence** :

«x vérifie l'équation ou l'inéquation» $\iff$ «$x\in\mathcal{S}$»

On raisonne généralement par équivalence mais, dans certains cas délicats, on peut préférer raisonner par double implication. L'implication réciproque consiste alors à vérifier que les candidats trouvés par implication sont bien solutions.

Méthode **Vérifier les solutions**

Lorsqu'on résout une équation ou une inéquation, on essaie toujours de vérifier si les solutions trouvées sont bien solutions de l'équation ou inéquation initiale.

Attention ! Établir une identité et résoudre une équation sont deux choses différentes. Dans le premier cas, il s'agit de montrer qu'une égalité est toujours vraie tandis que dans le second cas, il s'agit de déterminer à quelle condition une égalité est vraie.
De même, il y a une différence entre montrer qu'une inégalité est toujours vraie et résoudre une inéquation.

3.1 Équations

Équations

a, b, c désignent des réels.

Multiplication par un réel non nul
Si $c \neq 0$, alors $a = b \iff ca = cb$.

Composition par une fonction
$a = b \implies f(a) = f(b)$.
Si f est une fonction injective (si f ne prend jamais deux fois la même valeur), $a = b \iff f(a) = f(b)$. C'est en particulier le cas pour les fonctions ln, exp, $\sqrt{\ }$. Bien entendu, a et b doivent appartenir à l'ensemble de définition de f.

Passage au carré
$a = b \implies a^2 = b^2$.
Si a et b sont **positifs**, $a = b \iff a^2 = b^2$.

Valeur absolue
Si $b \geq 0$, alors $|a| = b \iff (a = b \text{ OU } a = -b)$.
$|a| = |b| \iff (a = b \text{ OU } a = -b)$.

Racine carrée
Si $b \geq 0$, alors $a = \sqrt{b} \iff (a^2 = b \text{ ET } a \geq 0)$.

Attention ! De manière générale, $a = b$ n'équivaut pas à $a^2 = b^2$. Voilà par exemple le genre d'erreur à ne pas commettre.

$$\begin{aligned}
& -x-1 = \sqrt{x^2+1} \\
\iff & (-x-1)^2 = x^2+1 \qquad \leftarrow \textbf{ce n'est pas une équivalence} \\
\iff & x^2+2x+1 = x^2+1 \\
\iff & x = 0
\end{aligned}$$

Mais 0 n'est manifestement pas solution de l'équation initiale !

Exercice 3.1

Résoudre l'équation $2x = \sqrt{x^2+1}$ par double implication et par équivalence.

Pour des équations faisant intervenir des valeurs absolues, on pourra mêler de la disjonction des cas au raisonnement par équivalence.

Exercice 3.2

Résoudre l'équation $|x+1| = 4 - |3x-2|$.

3.2 Inéquations

Inéquations

a, b, c désignent des réels.

Multiplication par un réel

Si $c > 0$, alors $a \leq b \iff ca \leq cb$ et $a < b \iff ca < cb$.
Si $c < 0$, alors $a \leq b \iff ca \geq cb$ et $a < b \iff ca > cb$.
Si $c \geq 0$, alors $a \leq b \implies ca \leq cb$.
Si $c \leq 0$, alors $a \leq b \implies ca \geq cb$.

Composition par une fonction

Si f est croissante, alors $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$.
Si f est décroissante, alors $a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$.
Si f est **strictement** croissante, alors $a \leq b \iff f(a) \leq f(b)$ et $a < b \iff f(a) < f(b)$.
Si f est **strictement** décroissante, alors $a \leq b \iff f(a) \geq f(b)$ et $a < b \iff f(a) > f(b)$.

Passage à l'inverse

Si a et b sont de **même signe**, $a \leq b \iff \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ et $a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Passage au carré

Si a et b sont **positifs**, $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$ et $a < b \iff a^2 < b^2$.

Valeur absolue

Si $b \geq 0$, alors $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$ et $|a| \geq b \iff (a \leq -b \text{ OU } a \geq b)$.
Si $b \geq 0$, alors $|a| < b \iff -b < a < b$ et $|a| > b \iff (a < -b \text{ OU } a > b)$.

Racine carrée

Si $b \geq 0$, alors $a \leq \sqrt{b} \iff (a \leq 0 \text{ OU } a^2 \leq b)$ et $a \geq \sqrt{b} \iff (a \geq 0 \text{ ET } a^2 \geq b)$.
Si $b \geq 0$, alors $a < \sqrt{b} \iff (a < 0 \text{ OU } a^2 < b)$ et $a > \sqrt{b} \iff (a > 0 \text{ ET } a^2 > b)$.

Exercice 3.3

Résoudre l'inéquation $2x \leq \sqrt{x^2 + 1}$.

Pour des inéquations faisant intervenir des valeurs absolues, on pourra mêler de la disjonction des cas au raisonnement par équivalence.

Exercice 3.4

Résoudre l'inéquation $|x + 1| \leq 4 - |3x - 2|$.

3.3 Systèmes d'équations et/ou d'inéquations

Système d'équations ou d'inéquations

Un système d'équations ou inéquations est la **conjonction** de plusieurs équations ou inéquations. On note un tel système à l'aide d'une accolade.
Par exemple, $\begin{cases} x^2 + 3 = y + 2 \\ e^x \leq \sin(y) \end{cases} \iff \left(x^2 + 3 = y + 2 \text{ ET } e^x \leq \sin(y)\right)$.

Remarque. Une série d'égalités ou d'inégalités peut s'écrire à l'aide d'un système.

$$a = b = c \iff \begin{cases} a = b \\ b = c \end{cases} \qquad a \leq b \leq c \iff \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases}$$