Ensembles

Sans rentrer dans les détails, on appelle **ensemble** une collection d'objets. Ces objets sont appelés les **éléments** de l'ensemble.

1 Appartenance et inclusion

Définition 1.1

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide** et est noté $\varnothing$. Un ensemble à un élément est appelé un **singleton**, un ensemble à deux éléments est une **paire**.

Définition 1.2 Appartenance

On dit que x **appartient** à un ensemble E si x est un élément de E et on note alors $x \in \mathrm{E}$.

Décrire un ensemble

- Un ensemble est dit défini **en extension** lorsqu'il est défini par l'énumération de ses éléments. Par exemple, $\mathrm{A} = \{1, 3, 5, 7\}$.
- Un ensemble est dit défini **en compréhension** lorsqu'il est défini par une propriété caractéristique de ses éléments. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs est $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$. Autrement dit, l'ensemble des entiers naturels pairs est l'ensemble des entiers n pour lesquels il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$.
- Un ensemble peut être défini à l'aide d'un autre ensemble. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs peut se noter $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$. Autrement dit, l'ensemble des entiers naturels pairs est l'ensemble des entiers de la forme $2k$ lorsque k parcourt $\mathbb{N}$.

Remarque. De manière plus concise, l'ensemble des entiers naturels pairs se note aussi $2\mathbb{N}$.

Attention ! Quand on décrit un ensemble en compréhension, on donne d'abord les éléments puis la condition qu'ils vérifient. Par exemple, la notation $\{n = 2k\}$ pour désigner l'ensemble des entiers naturels pairs n'a **AUCUN SENS**. Au mieux pourrait-on voir cet «ensemble» comme un ensemble d'équations.

Exemple 1.1

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 1-périodiques peut se noter $\left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\right\}$. Là encore, des notations du style $\{f(x+1) = f(x)\}$ ou $\{f(x+1) = f(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ ou encore $\{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\}$ n'ont **AUCUN SENS**.

Définition 1.3 Inclusion

On dit qu'un ensemble E est **inclus** dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F et on note alors $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$. De manière plus concise,

$$(\mathrm{E} \subset \mathrm{F}) \iff (\forall x, x \in \mathrm{E} \implies x \in \mathrm{F})$$

Exemple 1.2

On a la suite d'inclusion bien connue : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Attention ! Attention à ne pas confondre appartenance et inclusion.

- On a bien $0 \in \mathbb{N}$ mais $0 \not\subset \mathbb{N}$. Néanmoins, $\{0\} \subset \mathbb{N}$.
- On a bien $\{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z}$ mais $\{-1, 0, 1\} \notin \mathbb{Z}$.

Un élément peut appartenir à un ensemble mais ne peut pas être inclus dans un ensemble. Un ensemble peut être inclus dans un ensemble mais ne peut pas appartenir à un ensemble (à moins qu'il s'agisse d'un ensemble d'ensembles ...).

Définition 1.4 Partie

On appelle partie d'un ensemble E tout ensemble F inclus dans E. L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(\mathrm{E})$.

Exercice 1.1

Énumérer les parties de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Remarque. L'ensemble vide est une partie de tout ensemble (y compris de lui-même).

Définition 1.5 Egalité

On dit que deux ensembles E et F sont **égaux** si tout élément de E est un élément de F et réciproquement. On note alors $\mathrm{E} = \mathrm{F}$. De manière plus concise,

$$(\mathrm{E} = \mathrm{F}) \iff (\forall x, x \in \mathrm{E} \iff x \in \mathrm{F})$$

Proposition 1.1

Soient E et F deux ensembles alors $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ si et seulement si $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$.

Méthode Inclusion et égalité en pratique

- Pour montrer que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$, on montre que tout élément de E est un élément de F. On rédige donc de la manière suivante :
  «Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrons que $x \in \mathrm{F}$».
- Pour montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on peut soit montrer que $x \in \mathrm{E}$ si et seulement si $x \in \mathrm{F}$ en raisonnant par équivalence, soit procéder par **double inclusion** en montrant que $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Dans ce cas, la rédaction se fait en deux étapes :
  - «Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrons que $x \in \mathrm{F}$».
  - «Soit $x \in \mathrm{F}$. Montrons que $x \in \mathrm{E}$».

On peut également raisonner directement sur les ensembles sans considérer les éléments.

Exercice 1.2 **Médiatrice**

Soient A et B deux points du plan. Montrer que l'ensemble des points du plan équidistants de A et B est la droite orthogonale au segment [AB] en son milieu.

Exercice 1.3

Soient $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - y = 1\}$ et $B = \{(t + 1, 2t + 1), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

2 Opérations sur les ensembles

Définition 2.1 Intersection, union

Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **intersection** de A et B l'ensemble noté $A \cap B$ des éléments qui sont à la fois dans A et dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cap B) \iff (x \in A \text{ ET } x \in B)$$
- On appelle **union** de A et B l'ensemble noté $A \cup B$ des éléments qui sont dans A ou dans B. De manière plus concise,
$$(x \in A \cup B) \iff (x \in A \text{ OU } x \in B)$$

Définition 2.2 Intersection et union d'une famille d'ensembles

Ces définitions se généralisent à plus de deux ensembles. En effet, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles.

- On appelle **intersection** des A_i, notée $\bigcap_{i \in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans **tous** les A_i. De manière plus concise,
$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff (\forall i \in I, x \in A_i)$$
- On appelle **union** des A_i, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$ l'ensemble des éléments qui sont dans **au moins un** des A_i. De manière plus concise,
$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff (\exists i \in I, x \in A_i)$$

Remarque. Si les A_i sont deux à deux disjoints i.e. si $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$, alors la réunion des A_i est notée $\bigsqcup_{i \in I} A_i$.

Exercice 2.1

Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1[$ et que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right[= [0, 1]$.

Proposition 2.1 Distributivité de l'intersection et de l'union l'une sur l'autre

Soient A, B, C trois ensembles. Alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{et} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Cette propriété se généralise à une famille infinie d'ensembles :

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \quad \text{et} \quad A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

Remarque. Dans le cas d'une union disjointe, on conserve encore la distributivité :

$$A \cap \left(\bigsqcup_{i \in I} B_i\right) = \bigsqcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

Définition 2.3 Différence, complémentaire

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- On appelle différence de B dans A, notée $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas des éléments de B. De manière plus concise,
$$x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ ET } x \notin B)$$
- On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble $E \setminus A$ et on le note $\complement_E A$, ou A^c ou $\overline{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble de référence E. De manière plus concise,
$$x \in \overline{A} \iff x \notin A$$

Remarque.

- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Alors $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = E$ ou encore $A \sqcup \overline{A} = E$.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Alors $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Proposition 2.2

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Alors

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Là aussi, ces propriétés se généralisent à des familles d'ensembles. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Alors

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

Remarque. Si on traduit en français :

- le complémentaire de l'intersection est l'union des complémentaires ;
- le complémentaire de l'union est l'intersection des complémentaires.

Lien entre logique et ensembles

Logique	**Ensembles**	**Lien**
Implication	Inclusion	$(A \subset B) \iff (x \in A \implies x \in B)$
Équivalence	Égalité	$(A = B) \iff (x \in A \iff x \in B)$
Conjonction	Intersection	$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ ET } x \in B)$
Disjonction	Union	$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ OU } x \in B)$
Négation	Complémentaire	$x \in \overline{A} \iff x \notin A \iff \text{NON}(x \in A)$

Définition 2.4 Partition

Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On dit que cette famille est une **partition** de E si

(i) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$;

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = E$;

(iii) les A_i sont deux à deux disjoints i.e. $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.

Remarque. On omet parfois la vondition de non-vacuité des A_i dans la définition.

Exemple 2.1

$2\mathbb{Z}$ et $2\mathbb{Z} + 1$ forment une partition de $\mathbb{Z}$.

Définition 2.5 Recouvrement disjoint

Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. On dit que cette famille est une **recouvrement disjoint** de E si

(i) $E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$;

(ii) les A_i sont deux à deux disjoints i.e. $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.

3 Produit cartésien

Définition 3.1 Produit cartésien

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles. On appelle **produit cartésien** des ensembles E_i, noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour $1 \leq i \leq n$.
Si $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, le produit cartésien se note E^n.

Exemple 3.1

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

Remarque. Dans une proposition avec quantificateurs,

- $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{F}$ signifie la même chose que $\forall (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$;
- $\exists x \in \mathrm{E}, \exists y \in \mathrm{F}$ signifie la même chose que $\exists (x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$

Exercice 3.1

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E})$. Exprimer $\mathrm{E}^2 \setminus (\mathrm{A} \times \mathrm{B})$ en fonction de E, $\mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$ et $\mathrm{E} \setminus \mathrm{B}$.