

# FAMILLES SOMMABLES

$\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Familles de réels positifs

### Définition 1.1 Somme d'une famille de réels positifs

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$  une famille de réels **positifs**. Notons  $\mathcal{P}_f(J)$  l'ensemble des parties finies de  $J$ . On pose

$$\sum_{j \in J} u_j = \sup \left\{ \sum_{j \in K} u_j, K \in \mathcal{P}_f(J) \right\} \in [0, +\infty]$$

**REMARQUE.** Dans le cas où  $I = \mathbb{N}$ , la somme de la suite positive  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est tout simplement la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ . Si la série diverge,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ .

### Proposition 1.1 Invariance de la somme par permutation

Soient  $(u_j)_{j \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$  une famille de réels **positifs** et  $\varphi$  une permutation de  $J$ . Alors

$$\sum_{j \in J} u_{\varphi(j)} = \sum_{j \in J} u_j$$

### Définition 1.2 Famille sommable de réels positifs

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$  une famille de réels **positifs**. On dit que  $(u_j)_{j \in J}$  est **sommable** si  $\sum_{j \in J} u_j < +\infty$ .

**REMARQUE.** Soient  $(a_j)_{j \in J}$  et  $(b_j)_{j \in J}$  deux familles de réels tels que  $0 \leq a_j \leq b_j$  pour tout  $j \in J$ . Si  $(b_j)_{j \in J}$  est sommable, alors  $(a_j)_{j \in J}$  également.

### Exemple 1.1

Soit  $q \in [0, 1[$ . La famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable. En effet, si  $J$  est une partie finie de  $\mathbb{Z}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $J \subset \llbracket -N, N \rrbracket$ . Alors

$$\sum_{n \in J} q^{|n|} \leq \sum_{n=-N}^N q^{|n|} = 1 + 2q \frac{1 - q^N}{1 - q} \leq 1 + \frac{2q}{1 - q} = \frac{1 + q}{1 - q}$$

La somme de la famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est  $\frac{1 + q}{1 - q}$  puisque

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N q^{|n|} = \frac{1 + q}{1 - q}$$

**Exemple 1.2**

La famille  $\left(\frac{1}{pq}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  n'est pas sommable. En effet, posons  $J_N = \llbracket 1, N \rrbracket^2$  pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\sum_{(p,q) \in J_N} \frac{1}{pq} = \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

puisque la série harmonique diverge vers  $+\infty$ .

**Proposition 1.2 Opérations**

**Somme** Soient  $(u_j)_{j \in J}$  et  $(v_j)_{j \in J}$  des familles de réels **positifs**. Alors  $\sum_{j \in J} u_j + v_j = \sum_{j \in J} u_j + \sum_{j \in J} v_j$ .

**Multiplication par un réel positif** Soient  $(u_j)_{j \in J}$  une famille de réels **positifs** et  $\lambda$  un réel **positif**. Alors  $\sum_{j \in J} \lambda u_j = \lambda \sum_{j \in J} u_j$ .

**REMARQUE.** On utilise les conventions de calcul suivantes dans  $[0, +\infty]$  :

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$  ;
- pour  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \times (+\infty) = +\infty$  ;
- $0 \times (+\infty)$ .

**Proposition 1.3 Sommation par paquets**

Soit  $J = \bigsqcup_{i \in I} J_i$  et  $(u_j)_{j \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$  une famille de réels **positifs**. Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} u_j = \sum_{j \in J} u_j$$

**REMARQUE.** L'égalité est encore valable lorsque l'un des membres vaut  $+\infty$ .

**Exemple 1.3**

On souhaite calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  en admettant que  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

En utilisant la partition  $\mathbb{N}^* = \{2k, k \in \mathbb{N}^*\} \sqcup \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ ,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$

**Méthode**

Pour montrer qu'une famille de réels **positifs**  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, on peut employer le théorème de sommation par paquets ou le théorème de Fubini positif pour montrer que  $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$ .

**Exemple 1.4**

On veut déterminer la nature de la famille  $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Comme il s'agit d'une famille de réels positifs, on peut employer le théorème de sommation par paquets en remarquant que  $(\mathbb{N}^*)^2 = \bigsqcup_{p \geq 2} I_p$  avec  $I_p = \{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m+n=p\}$ . Ainsi

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_p} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\text{card}(I_p)}{p^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^\alpha}$$

Or  $\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$  donc

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 2$$

**Proposition 1.4 Théorème de Fubini positif**

Soit  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in (\mathbb{R}_+)^{I \times J}$  une famille de réels **positifs**. Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

**REMARQUE.** A nouveau, l'égalité est encore valable lorsque l'un des membres vaut  $+\infty$ .

**Exercice 1.1**

On souhaite calculer la somme de la famille  $\left(\frac{1}{q^p}\right)_{p,q \geq 2}$ .

$$\sum_{p,q \geq 2} \frac{1}{q^p} = \sum_{q=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{q^p} = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q^2 - q} = \sum_{q=2}^{+\infty} \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q} = 1$$

## 2 Familles sommables de complexes

**Définition 2.1 Famille sommable de réels**

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$  une famille de réels. On dit que la famille  $(u_j)_{j \in J}$  est **sommable** si la famille  $(|u_j|)_{j \in J}$  l'est.

**Rappel Parties positive et négative d'un réel**

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $x^+ = \max(0, x)$  et  $x^- = \max(0, -x)$ . Alors  $x = x^+ - x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$ .

**Proposition 2.1**

La famille  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$  est sommable si et seulement si les familles  $(u_j^+)_{j \in J}$  et  $(u_j^-)_{j \in J}$  sont sommables.

**Définition 2.2 Somme d'une famille de réels**

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$  une famille sommable. On définit la somme de la famille  $(u_j)_{j \in J}$  en posant

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{j \in J} u_j^+ - \sum_{j \in J} u_j^-$$

**Définition 2.3 Famille sommable de complexes**

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  une famille de complexes. On dit que la famille  $(u_j)_{j \in J}$  est **sommable** si la famille  $(|u_j|)_{j \in J}$  l'est.

**Proposition 2.2**

La famille  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  est sommable si et seulement si les familles  $(\operatorname{Re}(u_j))_{j \in J}$  et  $(\operatorname{Im}(u_j))_{j \in J}$  sont sommables.

**Définition 2.4 Somme d'une famille de complexes**

Soit  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  une famille sommable. On définit la somme de la famille  $(u_j)_{j \in J}$  en posant

$$\sum_{j \in J} u_j = \sum_{j \in J} \operatorname{Re}(u_j) + i \sum_{j \in J} \operatorname{Im}(u_j)$$

**Exemple 2.1**

Soit  $q \in \mathbb{C}$  tel que  $|q| < 1$ . Alors la famille  $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable de somme  $\frac{1+q}{1-q}$ .

**Notation 2.1**

L'ensemble des familles sommables de  $\mathbb{K}^J$  est noté  $\ell^1(J, \mathbb{K})$  ou plus simplement  $\ell^1(J)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

**REMARQUE.** Si  $(u_j)_{j \in J} \in \ell^1(J)$ , alors pour tout  $K \in \mathcal{P}(J)$ ,  $(u_k)_{k \in K} \in \ell^1(K)$ .

**Proposition 2.3 Invariance de la somme par permutation**

Soient  $(u_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{K})$  et  $\varphi$  une permutation de  $J$ . Alors

$$\sum_{j \in J} u_{\varphi(j)} = \sum_{j \in J} u_j$$

**Proposition 2.4**

Soient  $(u_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$  et  $(v_j)_{j \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$  telles que  $|u_j| \leq v_j$  pour tout  $j \in J$ . Si  $(v_j)_{j \in J}$  est sommable, alors  $(u_j)_{j \in J}$  l'est également.

**Proposition 2.5 Linéarité de la somme**

Soit  $((u_j)_{j \in J}, (v_j)_{j \in J}) \in \ell^1(J, \mathbb{K})$ . Alors pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,

- la famille  $(\lambda u_j + \mu v_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{K})$ ;
- $\sum_{j \in J} \lambda u_j + \mu v_j = \lambda \sum_{j \in J} u_j + \mu \sum_{j \in J} v_j$ .

**Proposition 2.6 Lien entre série et famille sommable**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  une suite numérique. La famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si et seulement si la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge absolument. Dans ce cas, la somme de la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la somme de la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ .

**REMARQUE.** Dans le cadre des séries, la notation  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  peut être ambiguë puisqu'elle peut donc désigner à la fois une série (i.e. la suite des sommes partielles) et la somme de la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposition 2.7 Sommation par paquets**

Soient  $J = \bigsqcup_{i \in I} J_i$  et  $(u_j)_{j \in J} \in \ell^1(J, \mathbb{C})$ . Alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} u_j = \sum_{j \in J} u_j$$

**Exemple 2.2**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ . On souhaite montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$

Fixons  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $|z^{2^n}| < 1$ , on obtient en faisant intervenir une série géométrique,

$$\frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose alors  $J_n = \{2^n(2k+1), k \in \mathbb{N}\}$ . En partitionnant  $\mathbb{N}^*$  suivant la valuation 2-adique, on montre que  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une partition de  $\mathbb{N}^*$ . Comme la série  $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} z^j$  converge absolument, la famille  $(z^j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  est sommable et le théorème de sommation par paquets permet alors d'affirmer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)} = \sum_{j=1}^{+\infty} z^j$$

Ce qui peut encore s'écrire d'après ce qui précède et en reconnaissant dans le second membre la somme d'une série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}$$

**Proposition 2.8 Théorème de Fubini**

Soit  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J} \in \ell^1(I \times J, \mathbb{K})$ . Alors les familles  $(\sum_{j \in J} u_{i,j})_{i \in I}$  et  $(\sum_{i \in I} u_{i,j})_{j \in J}$  sont sommables et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

**Exemple 2.3**

On admet dans la suite que  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge absolument i.e. la famille  $\left( \frac{(-1)^n}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est sommable. On peut donc appliquer le théorème de sommation par paquets avec la partition  $\mathbb{N}^* = \{2k, k \in \mathbb{N}^*\} \sqcup \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Mais en utilisant cette même partition,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2}\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{12}$$

**Exemple 2.4**

On veut calculer  $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)}$ .

Montrons d'abord la sommabilité de la famille  $\left( \frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ . On applique le théorème de Fubini positif :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

La famille  $\left( \frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  est donc sommable et on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Finalement, en utilisant l'exemple 2.3,

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = -\frac{\pi^2}{12}$$



**ATTENTION !** On ne peut pas toujours permuter l'ordre de sommation. Par exemple, en prenant

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$$

On obtient

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$$

Ceci prouve en particulier que la famille  $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  n'est pas sommable sinon les deux sommes précédentes seraient égales en vertu du théorème de Fubini.

**Proposition 2.9 Produit de deux familles sommables**

Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_j)_{j \in J}$  deux familles sommables. Alors la famille  $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \left( \sum_{i \in I} u_i \right) \left( \sum_{j \in J} v_j \right)$$

**REMARQUE.** Par récurrence, le résultat précédent s'étend à un produit d'un nombre fini de familles sommables.

### 3 Produit de Cauchy

**Définition 3.1 Produit de Cauchy**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  deux séries numériques. On appelle **produit de Cauchy** de ces deux séries la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  où

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 3.1**

Soient  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  deux séries numériques **absolument convergentes**. Alors leur produit de Cauchy  $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$  est une série absolument convergente. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

**Exemple 3.1**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Les séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{b^n}{n!}$  sont absolument convergentes de sommes respectives  $e^a$  et  $e^b$ . On vérifie facilement que leur produit de Cauchy est  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a+b)^n}{n!}$ . On en déduit que  $e^{a+b} = e^a e^b$ .