Fonctions de deux variables

Dans ce qui suit, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\| \cdot \|$ sa norme euclidienne associée.

1 Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

1.1 Définition

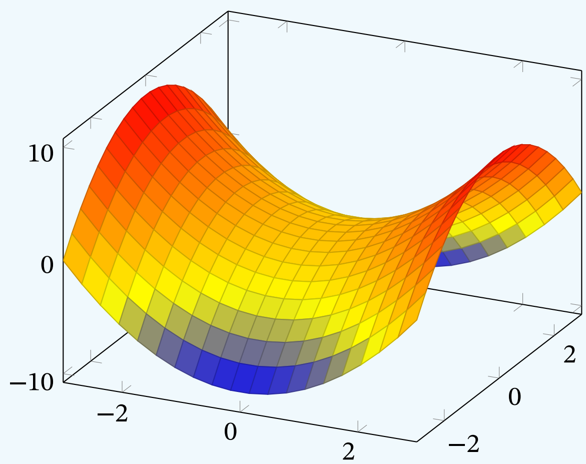
Une fonction de deux variables réelles est une fonction d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique

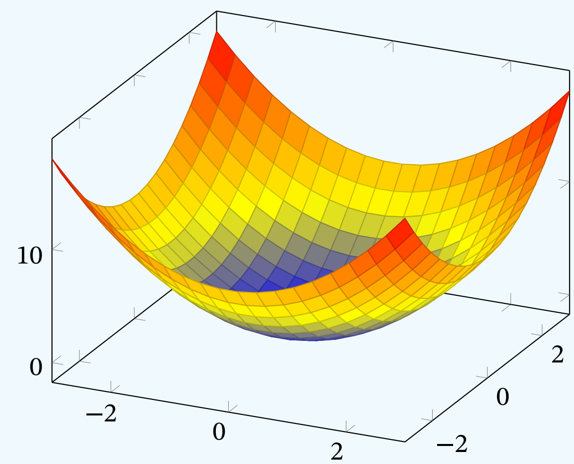
De même qu'une fonction d'une variable réelle peut-être représentée par une courbe de $\mathbb{R}^2$, une fonction de deux variables réelles peut-être représentée par une surface de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, soit $f : \mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors la surface représentative de f est $\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \mathrm{A}\}$.

Exemple 1.1

Voici deux exemples de surfaces représentatives.



$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$



$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$

Exercice 1.1

Quel est l'ensemble de définition de $(x, y) \mapsto \ln(x^2 - y^2)$? Le représenter graphiquement.

1.2 Notion d'ouvert

Définition 1.1 Boule

Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\mathrm{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^2,\ \|x-a\| < r\right\}$$

- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathrm{B}}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^2,\ \|x-a\| \leq r\right\}$$

Définition 1.2 Ouvert

Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un **ouvert** si

$$\forall a \in \mathrm{U},\ \exists \varepsilon > 0,\ \mathrm{B}(a,\varepsilon) \subset \mathrm{U}$$

Exemple 1.2

- $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
- Une boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$. Alors $]a,b[\times]c,d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ qui ne contient pas sa «frontière».

A partir de maintenant, U et V désignent des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

1.3 Continuité

Définition 1.3 Continuité

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{U}$. On dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{B}(a,\alpha),\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

On dit que f est continue sur U si f est continue en tout point de U.

Exemple 1.3

Les projections canoniques $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}\right.$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.1 Opérations algébriques sur la continuité

Mêmes résultats que pour les fonctions d'une variable réelle.

Exemple 1.4

Les projections canoniques étant continues sur $\mathbb{R}^2$, les fonctions polynomiales de deux variables sont également continues sur $\mathbb{R}^2$ par opérations algébriques.

Proposition 1.2

L'ensemble des applications continues sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un anneau.

Proposition 1.3 Composition et continuité

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$. Soient D une partie de $\mathbb{R}$ et $\varphi : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$. On suppose $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{D}$.
Si f est continue en $a \in \mathrm{A}$ et φ est continue en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est continue en a.
Si f est continue sur A et si φ est continue sur D, alors $\varphi \circ f$ est continue sur A.

Exemple 1.5

La fonction $(x, y) \mapsto \sin(x^3 - xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2 Dérivées partielles et fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

2.1 Dérivées partielles

Définition 2.1 Dérivées partielles

Soit $f : \mathrm{U} \mapsto \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$.

- Si $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, on appelle première dérivée partielle de f en (x_0, y_0) la dérivée de cette fonction en x_0 que l'on note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- Si $y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, on appelle seconde dérivée partielle de f en (x_0, y_0) la dérivée de cette fonction en y_0 que l'on note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Méthode **Calculer des dérivées partielles**

En pratique, pour déterminer les dérivées partielles, il suffit de dériver par rapport à une variable en laissant l'autre fixe.

Exemple 2.1

Soient $f : (x, y) \mapsto x^2 y + y$. Alors f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 1$.

Attention ! Contrairement aux fonctions d'une variable réelle, l'existence de dérivées partielles ne garantit pas la continuité. Soit f définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$ admet des dérivées partielles nulles en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si f admet des dérivées partielles en tout point de U et si ses dérivées partielles sont continues sur U.

Exemple 2.2

Les projections canoniques et les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. On peut à nouveau étendre cette notion aux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Puisque les composantes des dérivées partielles d'une telle fonction sont les dérivées partielles des composantes, on prouve qu'une telle fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses composantes le sont.

Théorème 2.1 Développement limité à l'ordre 1

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$. Alors f admet le développement limité à l'ordre 1 suivant :

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + o(\|(h,k)\|)$$

Remarque. De manière géométrique, ceci signifie que le plan d'équation

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

est tangent au graphe de f en (x_0,y_0).

Corollaire 2.1

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U est continue sur U.

2.3 Gradient

Définition 2.3 Gradient

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On appelle **gradient** de f en (x_0,y_0) le vecteur

$$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Proposition 2.1 Développement limité à l'ordre 1

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0, y_0) \in \mathrm{U}$. Alors

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (h,k)\rangle + o(\|(h,k)\|)$$

3 Dérivées partielles et composées

3.1 Dérivée directionnelle

Définition 3.1 Dérivée selon un vecteur

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathbb{R}^2$. Si $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, la dérivée de cette fonction en 0 s'appelle dérivée de f en a selon le vecteur v et est noté $\mathrm{D}_v f(a)$.

Remarque. En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \mathrm{D}_{e_1} f(a) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \mathrm{D}_{e_2} f(a)$$

Proposition 3.1 Lien entre dérivée directionnelle, dérivées partielles et gradient

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in \mathrm{U}$ et $v = (h,k) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\mathrm{D}_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k$$

Interprétation géométrique du gradient

En considérant u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ et en remarquant que $\mathrm{D}_v(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle$, on voit que le gradient de f en a donne la direction de la plus forte pente sur la surface représentant f au point a et que sa norme est la valeur de cette pente.

Proposition 3.2 Règle de la chaîne

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$, $x : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $(x,y)(\mathrm{I}) \subset \mathrm{U}$. Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in \mathrm{I},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t),y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)$$

Remarque. Si on note $\gamma = (x,y)$, alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in \mathrm{I},\ (f\circ\gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

Exemple 3.1

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et g définie par $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g'(t) = -\sin t\,\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \cos t\,\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t)$$

Exercice 3.1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$$

Lignes de niveau

Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathrm{E}_k = \{(x,y) \in \mathrm{U},\ f(x,y) = k\}$ est une courbe du plan appelée courbe de niveau de f. On suppose que E_k admet un paramétrage régulier $\gamma : t \in \mathrm{I} \to \mathrm{E}_k$. On a donc $f(\gamma(t)) = k$ pour $t \in \mathrm{I}$. En dérivant, on en déduit que pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$\forall t \in \mathrm{I},\ (f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$$

Comme $\gamma'(t) \neq (0,0)$ est un vecteur directeur de la tangente à E_k en $\gamma(t)$, le gradient de f en tout point de E_k est donc orthogonal à E_k.

Proposition 3.3 Composition

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$, $\varphi : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $(\varphi, \psi)(\mathrm{V}) \subset \mathrm{U}$. Alors l'application $g : (u,v) \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v), \psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v)$$

Passage en coordonnées polaires

Soit f une fonction de deux variables notées x et y. Passer en coordonnées polaires signifie faire le changement de variables $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ i.e. introduire une nouvelle fonction g telle que $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Les formules de composition donnent alors :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

En notant $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ la matrice de la rotation d'angle θ, on a donc $\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \mathrm{R}(-\theta)\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \mathrm{R}(\theta)\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix}$. Ceci prouve que $\nabla f(x,y)$ admet pour coordonnées $\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)$ dans la base (u_θ, v_θ) obtenue par rotation de la base canonique d'un angle θ, où $[r,\theta]$ sont les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes (x,y).

4 Extrema

Définition 4.1 Extremum glocal

Soient $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$.

- On dit que f admet un **maximum global** sur A en a si $\forall x \in \mathrm{A}$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum global** sur A en a si $\forall x \in \mathrm{A}$, $f(x) \geq f(a)$.

Définition 4.2 Extremum local

Soient $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$.

- On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{B}(a, \alpha) \cap \mathrm{A}$, $f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{B}(a, \alpha) \cap \mathrm{A}$, $f(x) \geq f(a)$.

Définition 4.3 Point critique

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que $a \in \mathrm{U}$ est un **point critique** de f si les dérivées partielles de f sont nulles en a.

Proposition 4.1

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathrm{U}$, alors a est un point critique de f.

Attention ! Il est essentiel que U soit un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Dans ce cas, toutes les dérivées directionnelles sont également nulles en a.

Méthode Recherche d'extrema

Recherche des points critiques On résout le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$.

Etude au voisinage des points critiques Si (a, b) est un point critique, on pose

$$g(u, v) = f(a + u, b + u) - f(a, b)$$

et on étudie le signe de v au voisinage de $(0, 0)$.

- Si g change de signe au voisinage de $(0, 0)$, alors f n'admet pas d'extremum local en (a, b).
- Si g est de signe constant au voisinage de $(0, 0)$, alors f admet un extremum local en (a, b).

On peut passer en polaires en posant $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$ pour simplifier la recherche du signe de g.
On peut également considérer des équivalents d'expression du type $g(t, 0)$, $g(0, t)$, $g(t, t^2)$, …au voisinage de 0 pour mettre en évidence un changement de signe.

Exemple 4.1

Considérons l'application $f:\ (x,y) \mapsto x^3 - y^2 - x$.

- Recherche des points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases}$$

- Etude au voisinage de $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$: on pose $u = x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $v = y$. On a alors :

$$f(x,y) - f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = u^3 + u^2\sqrt{3} - v^2 = g(u,v)$$

  On a $g(0,v) < 0$ pour $v < 0$ et $g(u,0) \underset{u\to 0}{\sim} u^2\sqrt{3}$. Ainsi $g(u,0) > 0$ pour u proche de 0 non nul. Donc f n'admet pas d'extremum local au voisinage de $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

- Etude au voisinage de $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$: on pose $u = x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $v = y$. On a alors :

$$f(x,y) - f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = u^3 - u^2\sqrt{3} - v^2 = g(u,v)$$

  Or $u^3 - u^2\sqrt{3} \underset{u\to 0}{\sim} -u^2\sqrt{3} \leq 0$ pour u proche de 0 et $-v^2 \leq 0$. Donc $g(u,v) \leq 0$ au voisinage de $(0,0)$. Ainsi f admet un maximum local en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.

- Extrema globaux : f n'admet pas d'extremum global puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f(0,y) = -\infty$.