

# GÉOMÉTRIE AFFINE

Dans tout ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## 1 Préliminaires

### Identification des points et des vecteurs

- Jusqu'à maintenant, les éléments de  $E$  étaient considérés comme des vecteurs. Dans ce chapitre, on les considérera également comme des points.
- Les éléments de  $E$  considérés comme des points seront notés avec des lettres majuscules.
- Les éléments de  $E$  considérés comme des vecteurs seront notés surmontés d'une flèche.
- Si  $A$  et  $B$  sont deux points de  $E$ , on notera  $\vec{AB} = B - A$ .
- Si  $A$  est un point de  $E$  et  $\vec{u}$  un vecteur de  $E$ ,  $A + \vec{u}$  est l'unique point  $B$  de  $E$  tel que  $\vec{AB} = \vec{u}$ .

### Proposition 1.1 Relation de Chasles

Soit  $A, B, C$  trois points de  $E$ . Alors  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

## 2 Sous-espace affines

### 2.1 Définition

#### Définition 2.1 Sous-espace affine

On appelle **sous-espace affine** de  $E$  toute partie  $\mathcal{F}$  de  $E$  de la forme  $\Omega + F$  où  $\Omega$  est un point de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Dans ce cas,

1. le sous-espace vectoriel  $F$  associé à  $\mathcal{F}$  est unique ; on l'appelle la **direction** de  $\mathcal{F}$ ;
2. pour tout point  $A \in \mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F} = A + F$ .

#### Notation 2.1

La direction d'un sous-espace affine  $\mathcal{F}$  est souvent notée  $\vec{\mathcal{F}}$ .

#### Définition 2.2 Translation

Soit  $\vec{u}$  un vecteur d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle translation de vecteur  $\vec{u}$  l'application qui à un point  $M$  de  $E$  associe le point  $M + \vec{u}$ .



**ATTENTION !** Une translation n'est pas une application linéaire.

**Définition 2.3 Dimension d'un sous-espace affine**

Soit  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $E$  de direction  $F$ . Si  $F$  est de dimension finie, on dit que  $\mathcal{F}$  est de dimension  $\dim F$ .

**Exemple 2.1**

- Les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^2$  sont les singletons et les droites et  $\mathbb{R}^2$ .
- Les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^3$  sont les singletons, les droites, les plans et  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 2.4**

On appelle **hyperplan affine** d'un espace vectoriel  $E$  tout sous-espace affine de  $E$  dont la direction est un hyperplan vectoriel.

**2.2 Intersection de sous-espaces affines****Proposition 2.1 Intersection de sous-espaces affines**

Soient  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines d'un espace vectoriel  $E$ . Pour tout  $i \in I$ , on note  $F_i$  la direction de  $\mathcal{F}_i$ .

- Soit  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  est vide ;
- soit  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  est un sous-espace affine de direction  $\bigcap_{i \in I} F_i$ .

**Exercice 2.1**

Soient  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  deux sous-espaces affines de  $E$  de direction respectives  $F$  et  $G$ .

1. Montrer que si  $E = F + G$ , alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ .
2. Montrer que si  $E = F \oplus G$ , alors  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est un singleton.

**3 Lien avec les applications linéaires****Proposition 3.1**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $b \in F$ . L'ensemble des solutions de l'équation  $f(x) = b$  d'inconnue  $x \in E$  est

- soit vide ;
- soit un sous-espace affine de direction  $\text{Ker } f$ .

**REMARQUE.** Plus précisément, l'ensemble des solutions de  $f(x) = b$ , s'il est non vide, est  $x_0 + \text{Ker } f$  où  $x_0$  est une solution particulière. Les solutions de  $f(x) = b$  sont donc les sommes d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène  $f(x) = 0_F$ .

**Exemple 3.1**

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions d'un système linéaire à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , à  $n$  inconnues dans  $\mathbb{K}$  et avec second membre est soit vide soit un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^n$ . Dans le second cas, si  $X = (x_1, \dots, x_n)$  est une solution particulière et si  $S$  est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé,  $\mathcal{S} = X + S$ .

**Exemple 3.2**

Soit  $(a, b) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^2$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions sur  $I$  de l'équation différentielle  $y' + ay = b$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^I$  de dimension 1. Plus précisément si  $y_0$  est une solution particulière (son existence est garantie) et si  $S$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, alors  $\mathcal{S} = y_0 + S$ .

**Exemple 3.3**

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  avec  $a \neq 0$  et  $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions sur  $I$  de l'équation différentielle  $ay'' + by' + cy = d$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^I$  de dimension 2. Plus précisément si  $y_0$  est une solution particulière (son existence est garantie) et si  $S$  est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, alors  $\mathcal{S} = y_0 + S$ .

**Exemple 3.4 Polynômes interpolateurs**

Soient  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$  distincts et  $(y_0, \dots, y_n)$ . L'ensemble  $\mathcal{P}$  des polynômes  $P$  tels que  $P(x_i) = y_i$  pour tout  $i \in [0, n]$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{K}[X]$ . Plus précisément si  $P$  est un polynôme vérifiant la condition précédente (son existence est garantie), alors  $\mathcal{P} = P + A\mathbb{K}[X]$  où  $A = \prod_{i=0}^n X - x_i$ .

## 4 Repères affines

**Définition 4.1**

On appelle **repère affine** d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  tout couple  $(O, \mathcal{B})$  où  $O$  est un point de  $E$  et  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .

**Définition 4.2 Coordonnées dans un repère affine**

Soit  $(O, \mathcal{B})$  un repère affine d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle **coordonnées** du point  $M \in E$  dans ce repère affine les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .