Intégration

Dans tout ce chapitre a et b désigne des réels. Quand on note $[a, b]$, il est sous-entendu que $a \leq b$.

1 Intégration des fonctions en escalier

1.1 Fonctions en escalier sur un segment

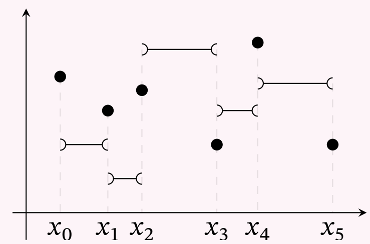
Définition 1.1 Fonction en escalier

On dit qu'une application $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **en escalier** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que

(i) $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$;

(ii) φ est constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.

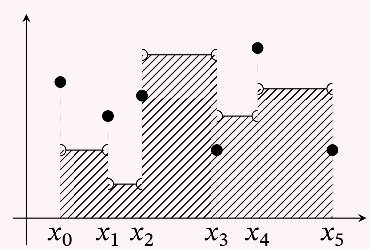
Une telle famille $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est appelée une **subdivision** de $[a, b]$ subordonnée à φ.
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ se note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ ou plus simplement $\mathcal{E}([a, b])$. C'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.



1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision subordonnée à φ.
Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on note c_i la valeur de φ sur $]x_i, x_{i+1}[$.
La quantité $\sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$ est indépendante de la subdivision u choisie.
On l'appelle l'**intégrale** de φ sur $[a, b]$ et on la note $\int_{[a,b]} \varphi$.



1.3 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 1.1 Propriétés de l'intégrale

Linéarité L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a, b])$.

Positivité de l'intégrale L'intégrale d'une fonction en escalier positive est positive.

Croissance de l'intégrale Soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a, b])^2$ tel que $\varphi \leq \psi$. Alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.

Relation de Chasles Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$ et $c \in]a, b[$. Alors les restrictions de φ à $[a, c]$ et $[c, b]$ sont en escalier et
$$\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} \varphi_{|[c,b]}.$$

2 Intégration des fonctions continues par morceaux

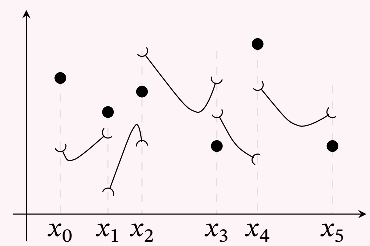
2.1 Fonctions continues par morceaux

Définition 2.1 Fonction continue par morceaux sur un segment

On dit qu'une application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ tels que

(i) $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$;

(ii) $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et x_{i+1} pour $i \in [\![1, n-1]\!]$.



Une telle famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ est appelée une **subdivision** de $[a, b]$ subordonnée à f.
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ se note $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{R})$ ou plus simplement $\mathcal{C}_m([a, b])$. C'est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

Définition 2.2 Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle si sa restriction à tout segment inclus dans cet intervalle est continue par morceaux sur ce segment.

Exemple 2.1

La fonction $t \mapsto \lfloor 1/t \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Approximation des fonctions continues par morceaux

Proposition 2.1

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a, b])^2$ tel que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$. On pose :

$$\mathrm{I}^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \ ,\ \varphi \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ ET } \varphi \leq f \right\} \qquad \mathrm{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \ ,\ \psi \in \mathcal{E}([a, b]) \text{ ET } \psi \geq f \right\}$$

Alors $\mathrm{I}^-(f)$ et $\mathrm{I}^+(f)$ admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure et ces bornes sont égales. On appelle cette borne commune l'**intégrale** de f sur $[a, b]$ et on la note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Remarque. On peut changer la valeur de f en un nombre fini de points sans changer son intégrale.

Notation 2.1

- Si $a \leq b$, $\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f$.
- Si $a \geq b$, $\int_a^b f(t)dt = -\int_{[b,a]} f$.

Attention ! Dans l'expression $\int_a^b f(t)dt$, le t s'appelle la **variable d'intégration**. Ce qui précède montre qu'une intégrale ne dépend pas de la variable d'intégration. Elle dépend seulement de ses bornes et de la fonction intégrée.

Remarque. Il y a une totale analogie avec les sommes qui ne dépendent pas de l'indice de sommation mais seulement des bornes et du terme général.

2.4 Propriétés de l'intégrale

Proposition 2.2 Propriétés de l'intégrale

Linéarité L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m([a,b])$.

Positivité de l'intégrale L'intégrale d'une fonction continue par morceaux positive est positive.

Croissance de l'intégrale Soit $(f,g) \in \mathcal{C}_m([a,b])^2$ telles que $f \leq g$ sur $[a,b]$. Alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

Inégalité triangulaire Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$. Alors $|f| \in \mathcal{C}_m([a,b])$ et $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Relation de Chasles Soient $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$ et $c \in]a,b[$. Alors les restrictions de f à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont continues par morceaux et $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f_{|[a,c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]}$.

Proposition 2.3

Soit $(f,g) \in \mathcal{C}(\mathrm{I})^2$ tel que $f \leq g$ sur I. Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$.

- Si $a \leq b$, $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
- Si $a \geq b$, $\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$.

Exercice 2.1

Soit f continue sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f(t)t^n\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

Proposition 2.4

Soient f continue sur un intervalle I. Soit $(a, b, c) \in \mathrm{I}^3$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Remarque. Cette version de la relation de Chasles est valable quelque soit l'ordre de a, b et c.

Proposition 2.5

Soit f une fonction **continue** et de **signe constant** sur $[a, b]$ $(a < b)$. Alors $\int_{[a,b]} f = 0$ si et seulement si $f = 0$ sur $[a, b]$.

Remarque. Il suffit donc de montrer qu'une fonction continue positive prend **une** valeur strictement positive sur $[a, b]$ pour prouver que son intégrale sur $[a, b]$ est strictement positive.

Attention ! La condition de continuité est essentielle. La fonction δ_0 nulle sur $\mathbb{R}^*$ et valant 1 en 0 a une intégrale nulle sur $[-1, 1]$ sans pour autant être nulle sur $[-1, 1]$.

Exercice 2.2

Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles. Montrer que $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$ si et seulement si f est de signe constant sur $[a, b]$.

3 Calcul de primitives et d'intégrales

3.1 Primitives

Définition 3.1 Primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction de I dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I et dont la dérivée vaut f.

Proposition 3.1

Si F est une primitive d'une fonction f continue sur I, alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions $\mathrm{F} + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque. En particulier, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

Attention ! Il est essentiel de considérer des primitives sur un **intervalle**.

Théorème 3.1 Theorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

(i) f admet une primitive sur I.

(ii) Soit $a \in \mathrm{I}$. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f nulle en a.

(iii) Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, $\int_a^b f(t)dt = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

La quantité $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ se note $[\mathrm{F}]_a^b$ ou encore $[\mathrm{F}(t)]_{t=a}^{t=b}$.

Remarque. Toutes les primitives de f sur I sont donc du type $x \mapsto \int_a^x f(t)dt + \mathrm{C}$. Ceci justifie la notation vu plus tôt dans l'année $\int f(t)dt$ pour une primitive de f définie à une constante additive près.
On remarque de plus qu'un calcul de primitives se ramène finalement à un calcul d'intégrales.

Exercice 3.1 **Banal**

Etablir la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction ψ définie par

$$x \longmapsto \int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2(t)}dt.$$

Corollaire 3.1

Soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{I})$. Alors, pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

3.2 Méthodes de calcul

3.2.1 Intégration par parties

Proposition 3.2 Intégration par parties

Soit $(u,v) \in \mathcal{C}^1(\mathrm{I})^2$. Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$.

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Exemple 3.1

- Calcul d'une primitive de ln.
- Calcul d'une primitive de arctan.
- Calcul d'une primitive de $x \mapsto x^n e^x$ pour $n = 0, 1, 2$.

Exercice 3.2 ★★ **Intégrales de Wallis**

On pose pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. Donner une expression de $\mathrm{I}_{2,n}$ et I_{2n+1} en fonction de n.
4. Vérifier que $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que $\dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$.
5. Démontrer que $\mathrm{I}_{n+1} \sim \mathrm{I}_n$.
6. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ (n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \dfrac{\pi}{2}$.
7. En déduire que

$$\mathrm{I}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

3.2.2 Changement de variable

Proposition 3.3 Changement de variable

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f une fonction continue sur $\varphi(\mathrm{I})$. Alors pour tout $(a, b) \in \mathrm{I}^2$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Remarque. On dit qu'on effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$.

Méthode **Changement de variable**

Soit à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t$ via le changement de variable $t = \varphi(u)$.

- On cherche a et b tels que $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$.
- On vérifie que φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
- «A la physicienne», $\dfrac{dt}{du} = \varphi'(u)$ donc $dt = \varphi'(u)\ \mathrm{d}u$.
- On remplace t par $\varphi(u)$ et dt par $\varphi'(u)\ \mathrm{d}u$ dans l'intégrale.

Exemple 3.2

Soit à calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$ en effectuant le changement de variable $t = \sin u$.

- On a $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- sin est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $dt = \cos u \,\mathrm{d}u$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\cos u\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)du = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Attention ! Il n'y a pas à réfléchir à l'ordre des bornes ou à les replacer dans un soit disant «bon sens». Par exemple, si l'on choisit d'effectuer le changement de variable $t = \cos u$ pour le calcul de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. On obtient

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2 u}(-\sin u)\,\mathrm{d}u$$

puisque $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$.

Remarque. Quand on effectue un changement de variable, on exprime l'**ancienne** variable en fonction de la **nouvelle** variable et on vérifie que cette fonction est $\mathcal{C}^1$. Néanmoins, en pratique, il arrive souvent que l'on exprime la **nouvelle** variable en fonction de l'**ancienne** variable.

Exemple 3.3

Pour calculer $\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+1}$, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$. En toute rigueur, on devrait dire $t = u^2$. Il faut alors vérifier que $\varphi : u \mapsto u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2]$ (et non $t \mapsto \sqrt{t}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 4]$, ce qui est faux). On en déduit que

$$\int_0^4 \frac{dt}{\sqrt{t}+1} = \int_0^2 \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u} = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = 4 - 2\ln 2$$

Application au calcul de primitives usuelles

Soit $a > 0$.

- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a,a[$ est $x \mapsto \arcsin\dfrac{x}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $]-a,a[$ est $x \mapsto \arccos\dfrac{x}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{a^2-x^2}$ sur $]-a,a[$ est $x \mapsto \dfrac{1}{a}\operatorname{argth}\dfrac{x}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \operatorname{argsh}\dfrac{x}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ sur $]a,+\infty[$ est $x \mapsto \operatorname{argch}\dfrac{x}{a}$.

Exercice 3.3

Calcul d'un primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

3.2.3 Parité et périodicité

Proposition 3.4 Intégration d'une fonction paire ou impaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

- Si f est paire, alors pour tout $a \in \mathrm{I}$,

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$$

- Si f est impaire,

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

Proposition 3.5

Soient f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque. Autrement dit, l'intégrale de f sur tout intervalle de longueur une période est la même.

3.2.4 Polynômes trigonométriques

Méthode **Intégration des polynômes trigonométriques**

Pour intégrer un polynôme trigonométrique, il suffit de le **linéariser**. Se reporter au chapitre sur les complexes.

Exemple 3.4

Calcul de $\int \sin^2 x dx$.

3.2.5 Passage en complexe

Méthode **Passage en complexe**

On sait que la partie réelle (resp. imaginaire) de l'intégrale est l'intégrale de la partie réelle (resp.imaginaire). Il est parfois plus facile de passer en complexe pour revenir en réel.

Exemple 3.5

Calcul de $\int_0^{2\pi} e^t \sin t dt$.

3.2.6 Fractions rationnelles

Méthode **Intégration des fractions rationnelles**

Pour intégrer une fraction rationnelle F, on la **décompose en éléments simples**.
On est alors ramené à intégrer des termes de la forme $\frac{1}{(x-\lambda)^n}$.

- Si $n > 1$ ou si $\lambda \in \mathbb{R}$, on connaît la primitive d'un tel terme.
- Si $n = 1$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
  - Si F n'est pas à coefficients réels, on pose $\lambda = a + ib$ et on utilise la quantité conjuguée :
  $$\frac{1}{x-\lambda} = \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + \frac{ib}{(x-a)^2+b^2}$$
  Le premier terme donne une primitive en ln et le deuxième terme une primitive en arctan.
  - Si F est à coefficients réels, la DES de F comporte deux termes conjugués $\frac{a}{x-\lambda}$ et $\frac{\overline{a}}{x-\overline{\lambda}}$. On regroupe ces deux termes et on obtient un terme du type $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ où x^2+px+q n'admet pas de racines réelles. L'idée est alors de mettre le trinôme x^2+px+q sous forme canonique. On obtient alors une primitive en ln et en arctan.

Exemple 3.6

Calcul de $\int \frac{4}{(x^2+1)^2} dx$.

3.2.7 Fractions rationnelles trigonométriques

On appelle fraction rationnelle trigonométrique une fonction du type $t \mapsto \mathrm{R}(\cos t, \sin t)$ où R est une fraction rationnelle à deux indéterminées (e.g. $\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \dfrac{\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2\mathrm{Y}-\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2-\mathrm{XY}}$).

Méthode **Intégration des fractions rationnelles trigonométriques**

On utilise la **règle de Bioche** pour se ramener à l'intégration d'une fraction rationnelle traditionnelle.

- Si $\mathrm{R}(\cos t, \sin t)dt$ est invariant par la transformation $t \mapsto -t$, on effectue le changement de variable $u = \cos t$.
- Si $\mathrm{R}(\cos t, \sin t)dt$ est invariant par la transformation $t \mapsto \pi - t$, on effectue le changement de variable $u = \sin t$.
- Si $\mathrm{R}(\cos t, \sin t)dt$ est invariant par la transformation $t \mapsto \pi + t$, on effectue le changement de variable $u = \tan t$.
- Sinon on effectue le changement de variable $u = \tan \dfrac{t}{2}$ et on utilise les formules de paramétrage rationnel du cercle trigonométrique.

Attention ! Il faut prendre en compte le « dt» pour le test de l'invariance par les différentes transformations.

Exemple 3.7

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{4-\cos^2 t}dt = \frac{\ln 3}{2}$$

3.2.8 Fractions rationnelles hyperboliques

On appelle fraction rationnelle hyperbolique une fonction du type $t \mapsto \mathrm{R}(\mathrm{ch}\, t, \mathrm{sh}\, t)$ où R est une fraction rationnelle à deux indéterminées (e.g. $\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \dfrac{\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2\mathrm{Y}-\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^2-\mathrm{XY}}$).

Méthode **Intégration des fractions rationnelles hyperboliques**

On pose $u = e^t$ et on se ramène à l'intégration d'une fraction rationnelle classique.

4 Approximation d'intégrales

4.1 Méthode des rectangles

Définition 4.1 Somme de Riemann

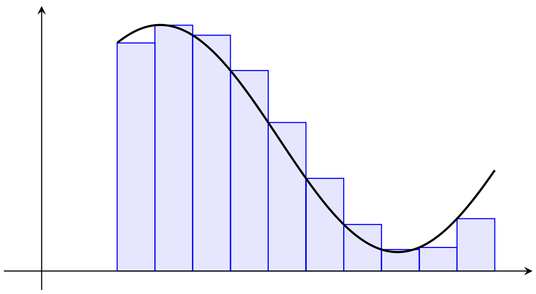
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$. On appelle **somme de Riemann** de f l'une des deux sommes suivantes :

$$\mathrm{R}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \qquad \mathrm{R}'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

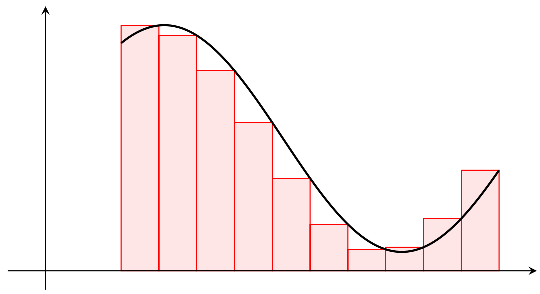
où $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et n est un entier non nul.

Interprétation graphique des sommes de Riemann

Une somme de Riemann n'est que l'approximation de l'aire correspondant à l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la somme des aires des rectangles dans la figure suivante.



Somme de Riemann $\mathrm{R}_n(f)$



Somme de Riemann $\mathrm{R}'_n(f)$

Les aires des rectangles sont les quantités $\dfrac{b-a}{n} f(a_k)$.

Proposition 4.1 Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$. Alors les suites $(\mathrm{R}_n(f))$ et $(\mathrm{R}'_n(f))$ convergent vers $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Proposition 4.2

Soit f une fonction K-lipschitzienne sur $[a, b]$. Alors

$$\left|\int_{[a,b]} f - \mathrm{R}_n(f)\right| \leq \frac{\mathrm{K}(b-a)^2}{2n} \qquad \left|\int_{[a,b]} f - \mathrm{R}'_n(f)\right| \leq \frac{\mathrm{K}(b-a)^2}{2n}$$

Remarque. C'est notamment le cas lorsque f est de classe C^1 sur $[a, b]$. Ce qu'il faut retenir, c'est que l'erreur commise en approchant l'intégrale par la somme de Riemann est un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

4.2 Méthode des trapèzes

Définition 4.2

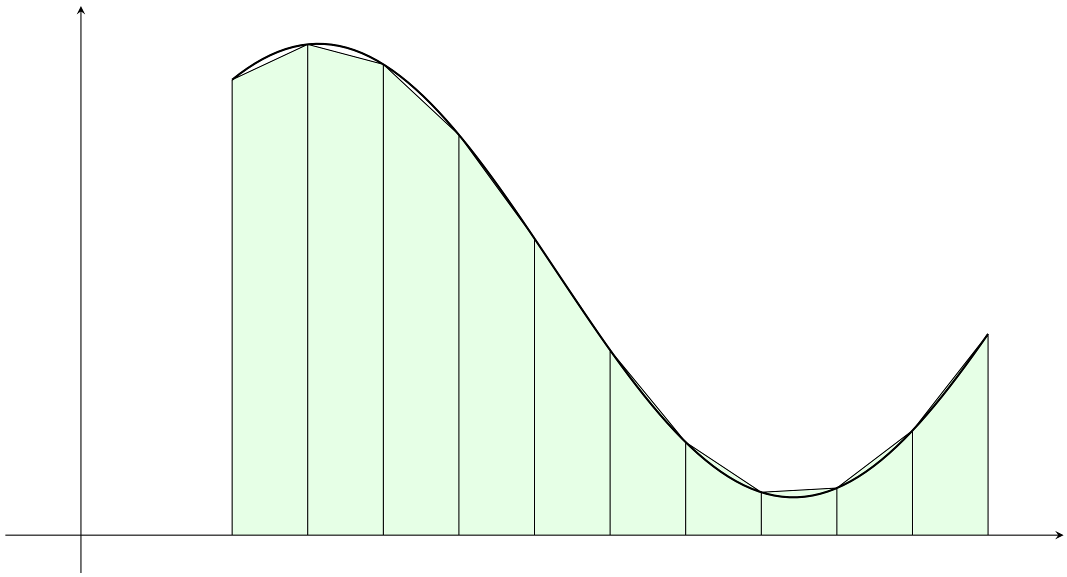
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b])$. On pose :

$$\mathrm{U}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \quad \text{avec} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

où n est un entier non nul.

Interprétation graphique de la méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à approcher l'aire correspondant à l'intégrale de f sur $[a, b]$ par la somme des aires des trapèzes dans la figure suivante.



Les aires des trapèzes sont les quantités $\dfrac{b-a}{n}\dfrac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}$.
Le dessin permet de constater que la méthode des trapèzes semble plus efficace que la méthode des rectangles.

Remarque. On pourrait prouver que si f est de classe C^2 sur $[a, b]$, l'erreur commise en approchant l'intégrale par la méthode des trapèzes est un $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

5 Cas des fonctions à valeurs complexes

Définition 5.1 Fonction continue par morceaux à valeurs complexes

Une application $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite **continue par morceaux** si ses parties réelle et imaginaire le sont.
On note $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux à valeurs complexes.

Définition 5.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes

Soit $f \in \mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{C})$. On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ le nombre complexe :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$$

En particulier,

$$\mathrm{Re}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) \qquad \mathrm{Im}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)$$

Quasiment toutes les propriétés des intégrales de fonctions continues par morceaux à valeurs réelles restent valables pour des intégrales de fonctions continues par morceaux à valeurs complexes quitte à modifier les valeurs absolues éventuelles par des **modules**. Les seules propriétés qui ne sont pas conservées sont celles qui feraient intervenir des inégalités entre complexes, à savoir :

- la positivité de l'intégrale ;
- la croissance de l'intégrale ;
- le résultat assurant qu'une fonction continue et de signe constant est d'intégrale nulle si et seulement si elle est constamment nulle.

Exercice 5.1 **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{int} \, \mathrm{d}t = 0$$

Exercice 5.2

Soit f continue sur $[a, b]$ à valeurs complexes. A quelle condition a-t-on $\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f|$?