

NOMBRES RÉELS

1 Approximations d'un réel

1.1 Ensembles de nombres

Notation 1.1

- On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres **réels**.
- On note \mathbb{Q} l'ensemble des nombres **rationnels** i.e. l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Un nombre réel non rationnel est dit **irrationnel**.
- On note \mathbb{D} l'ensemble des nombres **décimaux** i.e. l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.
- On note \mathbb{Z} l'ensemble des **entiers relatifs**.
- On note \mathbb{N} l'ensemble des **entiers naturels**.

REMARQUE. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1.1

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.2 Partie entière

Le théorème suivant découle de la construction des entiers.

Théorème 1.1 Propriété fondamentale des entiers

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{Z} admet un plus grand élément (resp. un plus petit élément).

Ce théorème légitime la définition suivante.

Définition 1.1 Partie entière d'un réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x , notée $[x]$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Proposition 1.1 Caractérisation de la partie entière

Soit $(x, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

$$k = [x] \iff x - 1 < k \leq x \iff k \leq x < k + 1$$

REMARQUE. Il pourra être utile dans les exercices de remarquer que si n et p sont des **entiers**

$$n < p \iff n \leq p - 1 \iff n + 1 \leq p$$

REMARQUE. On appelle **partie fractionnaire** de x le réel noté $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. On a donc $\{x\} \in [0, 1[$.

Proposition 1.2 Propriétés de la partie entière

- (i) La partie entière est une application croissante.
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
- (iii) $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.



ATTENTION! En général, $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et $\lfloor nx \rfloor \neq n \lfloor x \rfloor$ même si n est entier.

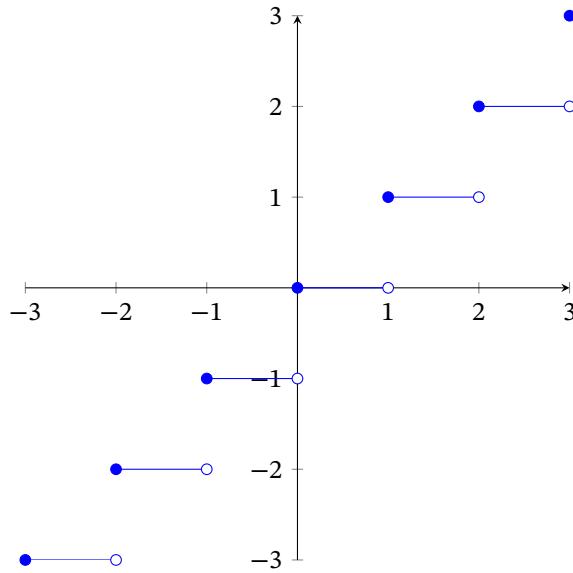


ATTENTION! La partie entière est croissante i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$

Mais la partie entière n'est pas strictement croissante. Par exemple, $0 < \frac{1}{2}$ mais $\lfloor 0 \rfloor = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Graphe de la partie entière



- La partie entière est croissante.
- La partie entière est constante par morceaux.
- La partie entière présente des discontinuité en les entiers relatifs.
- La partie entière est continue en tout réel non entier.
- La partie entière est continue à gauche et non à droite en tout entier.

REMARQUE. Pour $x \in \mathbb{R}$, le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x se note $\lceil x \rceil$. Si $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$k = \lceil x \rceil \iff x \leq k < x + 1 \iff k - 1 < x \leq k$$

On a en fait $\lceil x \rceil = -\lceil -x \rceil$.

1.3 Approximations décimales

Définition 1.2

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathbb{D}_n = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z} \right\}$.

- On appelle **valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par défaut** l'unique décimal $\alpha_n \in \mathbb{D}_n$ tel que $\alpha \leq x < \alpha + 10^{-n}$.
- On appelle **valeur décimale approchée de x à 10^{-n} près par excès** l'unique décimal $\beta_n \in \mathbb{D}_n$ tel que $\beta - 10^{-n} < x \leq \beta$.

Exemple 1.2

$3,1415$ est une valeur décimale approchée de π à 10^{-4} près par défaut.

$3,1416$ est une valeur décimale approchée de π à 10^{-4} près par excès.

REMARQUE. On peut exprimer α_n et β_n . En fait,

$$\alpha_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \beta_n = \frac{\lceil 10^n x \rceil}{10^n}$$

Si $x \in \mathbb{D}$, alors $\alpha_n = \beta_n = x$.

Sinon, $\beta_n = \alpha_n + 10^{-n}$.

REMARQUE. α est le nombre décimal dont les décimales (chiffres après la virgule) sont les n premières décimales de x .

1.4 Densité dans \mathbb{R} **Définition 1.3 Densité**

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} . On dit que \mathcal{A} est **dense** dans \mathbb{R} si tout intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} contient au moins un élément de \mathcal{A} .

Proposition 1.3 Caractérisation « epsilonesque » de la densité

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} . \mathcal{A} est dense dans \mathbb{R} si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathcal{A} \neq \emptyset$$

Proposition 1.4 Caractérisation séquentielle de la densité

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} . \mathcal{A} est dense dans \mathbb{R} si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de \mathcal{A} de limite x .

Proposition 1.5 Densité de \mathbb{D} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R}

\mathbb{D} , \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

2 Relation d'ordre sur \mathbb{R} **2.1 Majoration et minoration**

Définition 2.1 Parties majorées, minorées, bornées

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} .

- On dit que \mathcal{A} est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Dans ce cas, on dit que M est un **majorant** de \mathcal{A} .
- On dit que \mathcal{A} est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq m$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Dans ce cas, on dit que m est un **minorant** de \mathcal{A} .
- On dit que \mathcal{A} est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Proposition 2.1

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} . \mathcal{A} est bornée si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq K$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.

2.2 Maxima et minima

Définition 2.2 Maximum et minimum

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} .

- On dit que M est le **maximum** ou le **plus grand élément** de \mathcal{A} si $M \in \mathcal{A}$ et M est un majorant de \mathcal{A} . On note alors $m = \min \mathcal{A}$.
- On dit que m est le **minimum** ou le **plus petit élément** de \mathcal{A} si $m \in \mathcal{A}$ et m est un minorant de \mathcal{A} . On note alors $M = \max \mathcal{A}$.

Exemple 2.1

-1 et 1 sont respectivement le minimum et le maximum de l'intervalle $[-1, 1]$.



ATTENTION ! Une partie de \mathbb{R} n'admet pas forcément de maximum ou de minimum. Par exemple, $]-1, 1[$ n'admet ni minimum ni maximum. En particulier, -1 et 1 ne sont pas le minimum et le maximum de $]-1, 1[$ puisqu'ils n'appartiennent pas à cet intervalle.

2.3 Bornes inférieures et supérieures

Définition 2.3 Borne inférieure et supérieure

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} .

- On appelle **borne supérieure** de \mathcal{A} le minimum de l'ensemble des majorants de \mathcal{A} , s'il existe. Dans ce cas, on le note $\sup \mathcal{A}$.
- On appelle **borne inférieure** de \mathcal{A} le maximum de l'ensemble des minorants de \mathcal{A} , s'il existe. Dans ce cas, on le note $\inf \mathcal{A}$.

Rien ne garantit a priori l'existence d'une borne inférieure ou supérieure. On a néanmoins le théorème suivant.

Théorème 2.1 Propriété de la borne supérieure

Toute partie **non vide** et **majorée** (resp. **minorée**) de \mathbb{R} possède une borne supérieure (resp. inférieure).

REMARQUE. Ce théorème est admis car il découle directement de la construction de \mathbb{R} qui est hors programme. Pour votre culture, le corps des réels \mathbb{R} est construit à partir des corps des rationnels \mathbb{Q} de façon à ce qu'il possède justement cette propriété de la borne supérieure.

Proposition 2.2

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} .

- Si $M = \max \mathcal{A}$, alors $M = \sup \mathcal{A}$.
- Si $m = \min \mathcal{A}$, alors $m = \inf \mathcal{A}$.



ATTENTION ! Les réciproques sont fausses ! Une partie de \mathbb{R} peut posséder une borne supérieure (resp. inférieure) sans posséder de maximum (resp. minimum).

Exemple 2.2

Les bornes inférieures et supérieures de $[-2, 1[$ sont -2 et 1 . De plus, -2 est le plus petit élément de \mathcal{A} mais $[-2, 1[$ ne possède pas de plus grand élément.

Les propositions suivantes permettent de déterminer des bornes supérieures et inférieures en pratique.

Proposition 2.3 Caractérisation « epsilonesque » des bornes inférieures et supérieures

Soient \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} et $c \in \mathbb{R}$.

- $c = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si c est un minorant de \mathcal{A} et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $c + \varepsilon > a$.
- $c = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si c est un majorant de \mathcal{A} et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $c - \varepsilon < a$

Proposition 2.4 Caractérisation séquentielle des bornes inférieures ou supérieures

Soient \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} et $c \in \mathbb{R}$.

- $c = \inf \mathcal{A}$ si et seulement si c est un minorant de \mathcal{A} et s'il existe une suite (a_n) d'éléments de \mathcal{A} de limite c .
- $c = \sup \mathcal{A}$ si et seulement si c est un majorant de \mathcal{A} et s'il existe une suite (a_n) d'éléments de \mathcal{A} de limite c .

Exercice 2.1

Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $\left\{ \frac{3}{2^p} - \frac{1}{3^q}, (p, q) \in \mathbb{N}^2 \right\}$.

Méthode | Passage à la borne supérieure/inférieure

- Si $\forall x \in \mathcal{A}, x \leq M$, alors $\sup \mathcal{A} \leq M$.
- Si $\forall x \in \mathcal{A}, x \geq m$, alors $\inf \mathcal{A} \geq m$.



ATTENTION! Le passage à la borne supérieure/inférieure ne conserve que les inégalités **larges**, exactement comme le passage à la limite.

Exercice 2.2

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux parties non vides de \mathbb{R} . On définit $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{x + y \mid (x, y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$.

1. On suppose \mathcal{A} et \mathcal{B} majorées. Montrer que $\sup \mathcal{A} + \mathcal{B} = \sup \mathcal{A} + \sup \mathcal{B}$.
2. On suppose \mathcal{A} et \mathcal{B} minorées. Montrer que $\inf \mathcal{A} + \mathcal{B} = \inf \mathcal{A} + \inf \mathcal{B}$.

2.4 La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 2.4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On appelle droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ où les éléments $-\infty$ et $+\infty$ sont définis par les propriétés suivantes :

Prolongement de l'ordre $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x \leq +\infty$.

Prolongement de l'addition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty \\ x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} +\infty + (+\infty) = +\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \end{cases}$$

Prolongement de la multiplication

$$\begin{array}{lll} \forall x > 0, & x \times (+\infty) = +\infty, & x \times (-\infty) = -\infty \\ \forall x < 0, & x \times (+\infty) = -\infty, & x \times (-\infty) = +\infty \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \frac{x}{+\infty} = 0, & \frac{x}{-\infty} = 0 \\ (+\infty) \times (+\infty) = +\infty, & (+\infty) \times (-\infty) = -\infty, & (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \end{array}$$



ATTENTION! Formes indéterminées Cette définition ne donne aucun sens aux expressions suivantes $\infty - \infty$, $0 \times \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Corollaire 2.1

Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.5

Soit \mathcal{A} une partie non vide de \mathbb{R} .

- $\inf \mathcal{A} = -\infty$ si et seulement si pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $x \leq m$ (i.e. \mathcal{A} est non minorée).
- $\sup \mathcal{A} = +\infty$ si et seulement si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathcal{A}$ tel que $x \geq M$ (i.e. \mathcal{A} est non majorée).

Proposition 2.6 Caractérisation séquentielle

Soit \mathcal{A} une partie de \mathbb{R} .

- $\inf \mathcal{A} = -\infty$ si et seulement si il existe une suite (a_n) d'éléments de \mathcal{A} de limite $-\infty$.
- $\sup \mathcal{A} = +\infty$ si et seulement si il existe une suite (a_n) d'éléments de \mathcal{A} de limite $+\infty$.

2.5 Extension aux applications

Définition 2.5 Fonction majorée/minorée

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f est **majorée** sur E si $f(E)$ est majorée. Un majorant de $f(E)$ est appelé un **majorant** de f sur E .
- On dit que f est **minorée** sur E si $f(E)$ est minorée. Un minorant de $f(E)$ est appelé un **minorant** de f sur E .
- On dit que f est bornée sur E si f est minorée et majorée sur E .

REMARQUE. On retrouve en fait la définition classique.

- f est majorée sur E s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, f(x) \leq M$.
- f est minorée sur E s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in E, f(x) \geq m$.

Dans ce cas, M et m sont respectivement un majorant et un minorant de f sur E .

Proposition 2.7

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. f est bornée sur E si et seulement si $|f|$ est majorée sur E .

Définition 2.6 Maximum/minimum

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- On appelle maximum de f sur E le réel $\max_E f$, s'il existe. On le note $\max_E f$ ou $\max_{x \in E} f(x)$.
- On appelle minimum de f sur E le réel $\min_E f$, s'il existe. On le note $\min_E f$ ou $\min_{x \in E} f(x)$.

REMARQUE. Un maximum (resp. minimum) de f sur E est un majorant (resp. minorant) de f sur E atteint par la fonction f . Autrement dit,

- M est un maximum de f sur E si $\forall x \in E, f(x) \leq M$ et s'il existe $c \in E$ tel que $f(c) = M$,
- m est un minimum de f sur E si $\forall x \in E, f(x) \geq m$ et s'il existe $c \in E$ tel que $f(c) = m$.



ATTENTION ! Il ne faut pas confondre l'extremum d'une fonction et le point en lequel il est atteint. Notamment, l'extremum est unique mais peut être atteint plusieurs fois. Par exemple, -1 et 1 sont respectivement le minimum et le maximum de \sin sur \mathbb{R} , mais ils sont atteints une infinité de fois sur \mathbb{R} .

Définition 2.7 Borne supérieure/inférieure

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- On appelle **borne supérieure** de f sur E le réel $\sup_E f$, **s'il existe**. On le note $\sup_E f$ ou $\sup_{x \in E} f(x)$.
- On appelle **borne inférieure** de f sur E le réel $\inf_E f$, **s'il existe**. On le note $\inf_E f$ ou $\inf_{x \in E} f(x)$.

REMARQUE. Pour que f possède une borne supérieure (resp. inférieure) sur E , il est nécessaire et suffisant que E soit non vide et que f soit majorée (resp. minorée) sur E , en vertu de la propriété de la borne supérieure.
Si E est non vide, f admet toujours une borne supérieure et une borne inférieure sur E dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 2.3

Soit E un ensemble. Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées sur E . Alors $f + g$ est bornée sur E et

$$\sup_E |f + g| \leq \sup_E |f| + \sup_E |g|$$

Méthode Déterminer la borne inférieure/supérieure d'une fonction

Il suffit d'établir le tableau de variations de la fonction.

Exemple 2.4

Considérons la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. On obtient facilement son tableau de variation.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	↑ 1	0

Le théorème de la bijection montre que $f(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) =]0, 1]$ et donc que $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$. On en déduit que $\max_{\mathbb{R}} f = 1$ et donc que $\sup_{\mathbb{R}} f = 1$. De plus, $\inf_{\mathbb{R}} f = 0$ mais f n'admet pas de minimum sur \mathbb{R} . Si elle en admettait un, ce serait 0 mais 0 n'appartient pas à $f(\mathbb{R})$.

3 Intervalles de \mathbb{R}

La définition suivante permet de décrire tous les intervalles de \mathbb{R} (fermés, ouverts, majorés, minorés, ...).

Définition 3.1 Intervalle de \mathbb{R}

On appelle **intervalle** de \mathbb{R} toute partie I de \mathbb{R} vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in \mathbb{R}, x \leq t \leq y \implies t \in I$$

Proposition 3.1

Une intersection d'intervalles est un intervalle.

Proposition 3.2

Les intervalles de \mathbb{R} sont les ensembles du type $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ en position de «borne ouverte».

REMARQUE. On retrouve donc bien tous les intervalles au sens précédent de l'acception.
L'ensemble vide est un intervalle ouvert de \mathbb{R} puisqu'il est du type $]a, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Notation 3.1

Si I est un intervalle, on note \bar{I} l'intervalle composé de la réunion de I et des bornes finies de I et on note \mathring{I} l'intervalle I privé de ses bornes.

REMARQUE. \bar{I} est le plus petit intervalle fermé contenant I .
 \mathring{I} est le plus grand intervalle ouvert contenu dans I .

Exemple 3.1

- Si $I =] - 1, 2]$, alors $\bar{I} = [- 1, 2]$ et $\mathring{I} =] - 1, 2 [$.
- Si $I =] 3, +\infty [$, alors $\bar{I} = [3, +\infty [$ et $\mathring{I} =] 3, +\infty [$.
- Si $I =] - \infty, 4]$, alors $\bar{I} =] - \infty, 4]$ et $\mathring{I} =] - \infty, 4 [$.