Séries numériques

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 Série

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique (i.e. à valeurs dans $\mathbb{K}$). On appelle **série de terme général** u_n la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Cette série est noté $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou plus simplement $\sum u_n$ s'il n'y a pas ambiguïté sur le premier terme.
Pour $n \geq n_0$, S_n est appelée **somme partielle de rang** n de cette série.

Remarque. Une série est donc un cas particulier de suite.

Exemple 1.1

On appelle série arithmétique toute série dont le terme général est le terme général d'une suite arithmétique.
Par exemple, $\sum_{n\geq 0} n$ est une série arithmétique. Sa somme partielle de rang n est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 1.2

On appelle série géométrique toute série dont le terme général est le terme général d'une suite géométrique. Par exemple, $\sum_{n\geq 0} 2^n$ est une série géométrique. Sa somme partielle de rang n est $2^n - 1$.

Exemple 1.3

On appelle série harmonique la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Exemple 1.4

On appelle série télescopique toute série dont le terme général est de la forme $u_n = v_n - v_{n-1}$. La somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est $v_n - v_0$.

Remarque. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est croissante (resp. décroissante) si et seulement si la suite $(u_n)_{n\geq n_0+1}$ est positive (resp. négative).

1.2 Nature et somme d'une série

Définition 1.2 Convergence et divergence

On dit qu'une série converge (resp. diverge) si la suite de ses sommes partielles converge (resp. diverge).

Remarque. La convergence d'une série ne dépend pas du premier rang i.e. les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 1.3 Somme d'une série

Si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série et est notée $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Remarque. On a donc $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Remarque. Aussi surprenant cela puisse-t-il paraître, une somme infinie de termes, fussent-ils tous positifs, peut se révéler être finie.

Attention ! La notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ n'a de sens que si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge. Il faut donc prouver la convergence de la série **avant** d'employer cette notation.

Proposition 1.1 Lien suite/série

La série télescopique $\sum (u_n - u_{n-1})$ et la suite (u_n) sont de même nature (i.e. elles convergent toutes les deux ou elles divergent toutes les deux).

De plus, si (u_n) converge vers une limite ℓ, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - u_{n-1} = \ell - u_{n_0-1}$.

Exercice 1.1

Nature et somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

Remarque. On appelle **série de Taylor** une série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. On ne peut a priori rien dire sur ce type de série mais dans le cas où elle converge vers $f(x)$ (attention, ce n'est pas toujours le cas), on peut éventuellement le montrer grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Exercice 1.2 ★★★ **Taylor-Lagrange**

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange prouver la convergence et déterminer la somme des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$;
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ pour $x \in [0,1]$.

Méthode **Changement d'indice**

Il est possible d'effectuer des changements d'indices dans la somme d'une série. C'est même plus simple que pour une somme finie. Par exemple, supposons que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge. Effectuons par exemple le changement d'indice $p = n+1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{p=1}^{\mathrm{N}+1} u_{p-1} = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1}$$

En pratique, on ne passe pas par la limite des sommes partielles et on écrit directement $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1}$.

1.3 Opérations sur les séries

La proposition suivante n'est qu'une conséquence de la linéarité de la limite.

Proposition 1.2 Linéarité de la somme

Soient $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries numériques convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors la série $\sum_{n\geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n\geq n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} v_n$$

Remarque. En termes plus savants, les séries numériques convergentes forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Attention ! La réciproque est fausse en général. Par exemple, si $\sum (u_n + v_n)$ converge, on ne peut rien dire de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (prendre par exemple, $u_n = -v_n = 2^n$).

On évitera à tout prix d'écrire des égalités du type $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ **avant** d'avoir prouvé la convergence des séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$.

Proposition 1.3

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série complexe. Alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq n_0} \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum_{n\geq n_0} \mathrm{Im}(u_n)$ convergent et dans ce cas

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

En particulier

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) \qquad \mathrm{Im}\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Exercice 1.3

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(ix)^n}{n!}$ converge et a pour somme e^{ix}. En déduire la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et leurs sommes.

Proposition 1.4 Conjugaison

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série numérique. Alors les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} \overline{u_n}$ sont de même nature.

En cas de convergence, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n}$.

1.4 Divergence grossière

Proposition 1.5

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite (u_n) converge vers 0.

Attention ! La réciproque est absolument fausse. Par exemple, la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0 tandis que la série harmonique diverge.

Définition 1.4 Divergence grossière

Une série $\sum u_n$ est dite **grossièrement divergente** lorsque la suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Exemple 1.5

Si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge grossièrement.

La série $\sum \frac{1}{n}$ ne diverge pas grossièrement.

1.5 Séries usuelles

Proposition 1.6 Série géométrique

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Exercice 1.4

Nature et somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nq^n$.

Proposition 1.7 Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$.

1.6 Reste d'une série convergente

Définition 1.5 Reste d'une série convergente

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série convergente. Pour tout $n \geq n_0$, la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ est convergente et on appelle sa somme le **reste de rang** n de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$. Autrement dit, le reste de rang n de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1.8

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série convergente. Alors pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarque. Si on note S_n la somme partielle de rang n, R_n le reste de rang n et S la somme de la série, on a donc $S_n + R_n = S$ pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1.6

Lorsque $|q| < 1$, le reste de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ est $\frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Corollaire 1.1

La suite des restes d'une série convergente converge vers 0.

2 Comparaison à une intégrale

Méthode **Comparaison à une intégrale**

On considère une série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ où f est une fonction continue et **monotone** sur $\mathbb{R}_+$. On peut comparer les sommes partielles S_n à une intégrale pour déterminer la nature de la série. Si, par exemple, f est croissante, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$:

$$f(k) \leq f(t) \leq f(k+1)$$

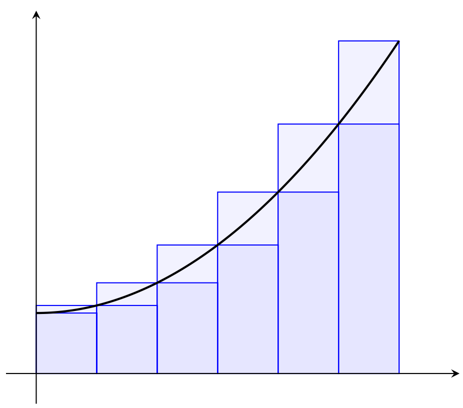
Puis par intégration sur $[k, k+1]$,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k+1)$$

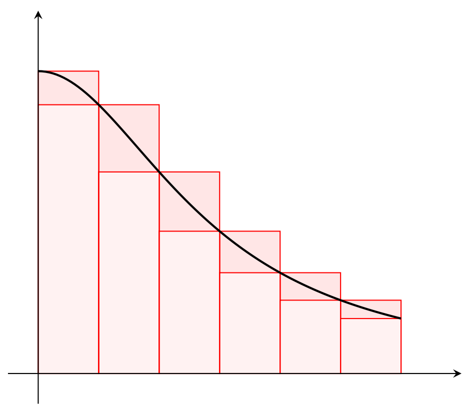
Enfin, en sommant l'inégalité de gauche pour $0 \leq k \leq n$ et celle de droite pour $0 \leq k \leq n-1$, on obtient via la relation de Chasles

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(0) \leq S_n \leq \int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a des résultats analogues lorsque f est décroissante.
Les encadrements obtenus permettent éventuellement de déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles.
Graphiquement, la méthode correspond à encadrer l'intégrale de f sur un intervalle par une somme d'aires de rectangles d'où le nom de méthode des rectangles.



Cas d'une fonction croissante



Cas d'une fonction décroissante

En modifiant légèrement la technique, on peut également obtenir un encadrement et potentiellement un équivalent de la suite des restes (en cas de convergence).

Remarque. Il ne s'agit pas de retenir des formules par cœur mais de retenir la méthode permettant d'obtenir des encadrements des sommes partielles et des restes.

Exemple 2.1 Équivalent de la série harmonique

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k}$$

En sommant convenablement, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ou encore

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

L'inégalité de gauche permet de conclure que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

L'encadrement permet même d'affirmer que donner un équivalent des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Proposition 2.1 Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque. Si $\alpha \leq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Remarque. Pour $\alpha > 1$, on note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. La fonction ζ est appelée fonction ζ de Riemann.

Exemple 2.2 Équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Par intégration,

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Mais en sommant l'encadrement précédent, on a également pour $\mathrm{N} > n \geq 1$

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

ou encore

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} \leq \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{\mathrm{N}}$$

Par passage à la limite

$$\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

On obtient ainsi un équivalent de la suite des restes de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 2.1

Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha < 1$ et un équivalent de son reste lorsque $\alpha > 1$.

3 Séries à termes positifs

Une série $\sum u_n$ est dite à **termes positifs** si les u_n sont positifs.

3.1 Résultats généraux

Le théorème de la limite monotone permet d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 3.1

Une série à termes **positifs** converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est **majorée**.
Dans le cas contraire, elle diverge vers $+\infty$.

Corollaire 3.1

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Remarque. En cas de convergence et si $u_n \leq v_n$ pour $n \geq \mathrm{N}$, alors $\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} v_n$.

Exemple 3.1

La série $\sum \frac{\arctan n}{n^2}$ converge.
La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

Méthode **Comparaison série-intégrale : nature d'une série**

On considère une série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ où f est une fonction continue par morceaux, **positive** et **décroissante** sur $\mathbb{R}_+$. On peut déterminer la nature de la série $\sum f(n)$ en comparant son terme général à une intégrale.
Donnons-nous $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [n, n+1]$, $f(t) \leq f(n)$ puis en intégrant sur $[n, n+1]$,

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n)$$

i.e.

$$0 \leq \mathrm{F}(n+1) - \mathrm{F}(n) \leq f(n)$$

où F est une primitive de f. Si la suite $(\mathrm{F}(n))$ diverge, la série télescopique $\sum \mathrm{F}(n+1) - \mathrm{F}(n)$ diverge également et enfin, la série $\sum f(n)$ diverge par comparaison.
De la même manière, si on se donne $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [n-1, n]$, $f(n) \leq f(t)$ puis

$$0 \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(n-1)$$

Si la suite $(\mathrm{F}(n))$ converge, la série télescopique $\sum \mathrm{F}(n) - \mathrm{F}(n-1)$ converge aussi et enfin, la série $\sum f(n)$ converge par comparaison.

Exemple 3.2

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$. On constate que $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Ainsi pour $n \geq 3$,

$$0 \leq \frac{1}{n\ln^2 n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2 t} = -\left[\frac{1}{\ln t}\right]_{n-1}^{n} = \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n}$$

Comme la suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ converge, la série télescopique $\sum \frac{1}{\ln(n-1)} - \frac{1}{\ln n}$ converge aussi et enfin, la série $\sum \frac{1}{n\ln^2 n}$ converge par comparaison.

Exemple 3.3

On souhaite déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$. On constate que $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Ainsi pour $n \geq 2$,

$$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leq \frac{1}{n \ln n}$$

ou encore

$$0 \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leq \frac{1}{n \ln n}$$

Comme la suite $(\ln(\ln n))$ diverge, la série télescopique $\sum \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)$ diverge aussi et enfin, la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge par comparaison.

3.2 Absolue convergence

Définition 3.1 Absolue convergence

Une série numérique (réelle ou complexe) $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 3.1

Une série absolument convergente est convergente. Dans ce cas, $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Attention ! La réciproque est fausse. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge tandis que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 3.4

La série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolument.

Exercice 3.1 **Sommation d'Abel**

Soient $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n \geq n_0}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k,\ b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n \mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ pour tout $n \geq n_0$.
2. Utiliser la question précédente pour étudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$.
3. De manière générale, montrer que si (B_n) converge vers 0, si (A_n) est bornée et si $\sum_{n \geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors $\sum_{n \geq n_0} a_n \mathrm{B}_n$ est convergente.

3.3 Relations de comparaison

Proposition 3.2

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On suppose $\sum v_n$ à termes **positifs** à partir d'un certain rang. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Remarque. Les résultats restent vrais si on remplace le $\mathcal{O}$ par un o puisque la négligabilité implique la domination.

Attention ! Encore une fois, il est essentielle que la série $\sum v_n$ soit à termes positifs. Posons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
La série $\sum v_n$ converge et $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ mais $\sum u_n$ diverge.

Proposition 3.3

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques dont l'une des deux est à termes **positifs** à partir d'un certain rang. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque. Si (u_n) et (v_n) sont des suites réelles telles que $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Exemple 3.5

La série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.
La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ diverge.
La série $\sum \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ est convergente.

Attention ! Il est essentiel que les des deux séries soit à termes positifs (du moins à partir d'un certain rang).
Par exemple, en posant $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$, on a bien $u_n \sim v_n$ mais $\sum u_n$ converge tandis que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 3.2 **Règle de d'Alembert**

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes **strictement positifs**.

1. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l < 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.
2. Montrer que si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $l > 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge.
3. Montrer à l'aide de deux exemples que l'on ne peut pas conclure si la suite de terme général $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet 1 pour limite.
4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n!}{n^n}$.

3.4 Séries alternées

Proposition 3.4 Critère spécial des séries alternées

Soit (u_n) une suite monotone (à partir d'un certain rang) et de limite nulle. Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Remarque. Ce critère est utile pour montrer la convergence de série non absolument convergente. Il serait par exemple ridicule d'invoquer ce résultat pour justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Il suffit en effet de constater que $\frac{(-1)^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exemple 3.6

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Exemple 3.7

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Bien entendu, $\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées. Mais on ne peut pas utiliser le théorème de comparaison car il ne s'agit pas là de séries à **termes positifs**.

Néanmoins, comme $\sin u \underset{u\to 0}{=} u + \mathcal{O}(u^3)$,

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge car elle respecte le critère spécial des séries alternées et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge également. On en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.

Exercice 3.3

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Proposition 3.5 Signe et majoration du reste d'une série alternée

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite monotone de limite nulle. On note R_n le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq n_0}(-1)^n u_n$ i.e. $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$. Alors pour tout $n \geq n_0 - 1$,

- R_n est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$;
- $|\mathrm{R}_n| \leq |u_{n+1}|$.

Remarque. En français : le reste d'une série vérifiant le critère des séries alternées est du même signe que son premier terme et est majoré en valeur absolue par la valeur absolue de ce premier terme.

Exemple 3.8

Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. D'après le critère spécial des séries alternées, cette série converge. Notons S sa somme et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

- Alors $\mathrm{S} = \mathrm{R}_0$ donc S est du signe de u_1 et $|\mathrm{S}| \leq |u_1|$. On en déduit que $0 \leq \mathrm{S} \leq u_1 = 1$.
- On peut affiner l'encadrement. En effet, R_1 est du signe de u_2 et $|\mathrm{R}_1| \leq |u_2|$ donc $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{R}_1 \leq 0$. Comme $\mathrm{S} = u_1 + \mathrm{R}_1$, $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{S} \leq 1$.
- On peut encore aller plus loin. R_2 est du signe de u_3 et $|\mathrm{R}_2| \leq |u_3|$ donc $0 \leq \mathrm{R}_2 \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $\mathrm{S} = u_1 + u_2 + \mathrm{R}_2$, $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathrm{S} \leq 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.