Sommes et produits

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Techniques de calcul

1.1 Le symbole $\sum$

Notation 1.1

Soit I un ensemble **fini** et $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$. On note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$.

Remarque. L'associativité et la commutativité de la loi $+$ sur $\mathbb{K}$ permet de définir correctement cette somme. Elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme les termes.

Remarque. Si $I = \varnothing$, on convient que $\sum_{i\in I} a_i = 0$ (élément neutre pour la loi $+$).

Notation 1.2

Dans le cas où $I = [\![m, n]\!]$, on note

$$\sum_{k\in[\![m,n]\!]} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n & \text{si } m \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut aussi noter $\sum_{m\leq k\leq n} a_k$. Cette somme comporte $n - m + 1$ **termes**.

Remarque. La variable k est **muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable. Autrement dit,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{p=m}^{n} a_p$$

Exercice 1.1

Calculer $\sum_{k=2}^{n-1} 1$.

Attention ! Le résultat d'une somme ne peut pas dépendre de l'indice de sommation, ça n'aurait aucun sens ! Une somme ne dépend que de ses bornes et du terme général sommé.

1.2 Règles de calcul

Linéarité de la somme :

$$\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k$$
$$\sum_k \lambda a_k = \lambda \sum_k a_k$$

Attention ! On ne peut mettre en facteur qu'une expression qui ne dépend pas de l'indice de sommation.

Remarque. Si on combine les deux propriétés précédentes, on a :

$$\sum_k (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_k a_k + \mu \sum_k b_k$$

Attention ! La sommation se comporte mal avec les produits. Autrement dit, en général,

$$\sum_k a_k b_k \neq \left(\sum_k a_k\right)\left(\sum_k b_k\right)$$

1.3 Sommes télescopiques

Méthode **Télescopage**

On appelle somme télescopique toute somme du type suivant

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

Exercice 1.2

Calculer $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Sommes de puissances

Notons $\mathrm{S}_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$. On sait (série arithmétique) que $\mathrm{S}_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Traitons le calcul de $\mathrm{S}_2(n)$.

Première méthode

On pose $u_k = ak^3 + bk^2 + ck$ et on déterminer a, b, c tels que $u_{k+1} - u_k = k^2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Deuxième méthode

On exprime la somme $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$ de deux manières différentes. On a par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = (n+1)^3 - 1 = n\left[(n+1)^2 + (n+1) + 1\right].$$

Et en développant chaque terme de la somme, on a aussi :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3\mathrm{S}_2(n) + 3\mathrm{S}_1(n) + n$$

Après calcul, on obtient

$$\mathrm{S}_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 1.3

Calculer $\mathrm{S}_3(n)$.

1.4 Changement d'indice

Méthode **Changement d'indice**

On peut procéder à un changment d'indice pour deux types de raison.

- Si l'on veut changer l'indice dans les termes à sommer. Par exemple,

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{l=m+1}^{n+1} a_l$$

en posant $l = k+1$ dans les termes de la somme et en remarquant que l prend alors toutes les valeurs entières entre $m+1$ et $n+1$. Ou encore,

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} a_l$$

en posant $l = n-k$ dans les termes de la somme et en remarquant que l prend alors toutes les valeurs entières entre 0 et n.

- Si l'on veut changer les bornes de la somme. Par exemple,

$$\sum_{k=2}^{n+2} a_k = \sum_{l=0}^{n} a_{l+2}$$

en posant $l = k-2$ de telle sorte que les bornes soient 0 et n et en changeant les indices des termes de la somme en remarquant que $k = l+2$.

Dans les deux cas, on peut vérifier en considérant le premier et le dernier terme de la somme avant et après changement d'indice.

Attention ! On ne peut pas effectuer n'importe quel changement d'indice. Par exemple, soit $S = \sum_{k=0}^{3} a_{2,k}$. On pourrait naïvement effectuer le chanegement d'indice $l = 2k$ de sorte que $S = \sum_{l=0}^{6} a_l$. Mais

$$\sum_{k=0}^{3} a_{2,k} = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 \qquad \text{tandis que} \qquad \sum_{l=0}^{6} a_l = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

Le problème vient du fait que $2k$ ne prend pas toutes les valeurs entières entre 0 et 6 mais seulement les valeurs paires.

Exercice 1.4

Compléter les trous dans les égalités suivantes :

$$\sum_{k=3}^{n} u_{k+2} = \sum_{k=\bullet}^{\bullet} u_k, \quad \sum_{k=4}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{\bullet} u_\bullet, \quad \sum_{k=3}^{n+2} u_{k+1} = \sum_{k=\bullet}^{n} u_\bullet$$

Exercice 1.5

Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right).$$

On peut énoncer cette technique de changement d'indice de manière plus rigoureuse.

Proposition 1.1

Soit I un ensemble **fini**, $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et φ une **bijection** de I sur un ensemble J. Alors

$$\sum_{i\in I} a_{\varphi(i)} = \sum_{j\in J} a_j$$

Remarque. On a effectué le changement d'indice $j = \varphi(i)$.

1.5 Sommation par paquets

On a d'abord tout simplement :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k \quad \text{si} \quad m \le p \le n$$

Exercice 1.6

Calculer $\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n)$ et $\sum_{k=0}^{2n} \max(k,n)$.

Séparation des termes d'indices pairs et impairs

Il existe plusieurs façons d'écrire la somme des termes d'indices pairs et et la somme des termes d'indices impairs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k &= \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ pair}}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ impair}}}^{n} a_k \\
&= \sum_{\substack{m\le k\le n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{m\le k\le n \\ k \text{ impair}}} a_k \\
&= \sum_{m\le 2k\le n} a_{2,k} + \sum_{m\le 2k+1\le n} a_{2k+1} \\
&= \sum_{k=\left\lceil \frac{m}{2}\right\rceil}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} a_{2,k} + \sum_{k=\left\lceil \frac{m-1}{2}\right\rceil}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2}\right\rfloor} a_{2k+1}
\end{aligned}$$

Exemple 1.1

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l} - \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n}{2l+1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l} - \sum_{l=1}^{n} \binom{2n}{2l-1}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l} - \sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l+1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{2n}{2l} - \sum_{l=1}^{n+1} \binom{2n}{2l-1}$$

On peut énoncer cette technique de sommation par paquet de manière plus rigoureuse.

Proposition 1.2

Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$. Si $I = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j$, alors

$$\sum_{i\in I} a_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i\in B_j} a_i\right)$$

2 Sommes classiques

2.1 Factorisation de $a^n - b^n$

Proposition 2.1

Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \end{aligned}$$

Remarque. On a en particulier

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

2.2 Séries arithmétiques et géométriques

Proposition 2.2 Séries arithmétiques

Soient (a_n) une suite arithmétique et $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$.

$$\sum_{k=n}^{p} a_k = \mathrm{N}\frac{a_n + a_p}{2}$$

où $\mathrm{N} = p - n + 1$ est le nombre de termes de la somme.
En français, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égal au produit de la **moyenne** des termes extrêmes par le **nombre** de termes.

Exemple 2.1

On retrouve en particulier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 2.3 Séries géométriques

Soient (a_n) une suite géométrique de raison q et $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \leq p$.

$$\sum_{k=n}^{p} a_k = \begin{cases} a_n \dfrac{1-q^{\mathrm{N}}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ \mathrm{N}a_n = \mathrm{N}a_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

où $\mathrm{N} = p - n + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Remarque. On retiendra en particulier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$.

Exercice 2.1

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

2.3 Sommes binomiales

2.3.1 Coefficients binomiaux

Définition 2.1 Factorielle

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n!$ le produit des entiers de 1 à n i.e. $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$. On convient que $0! = 1$.

Définition 2.2 Coefficient binomial

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Remarque. Lorsque l'on interprétera les coefficients binomiaux de manière combinatoire, on verra que l'on peut convenir que $\dbinom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

Proposition 2.4 Propriétés des coefficients binomiaux

Symétrie des coefficients binomiaux Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Formule de Pascal Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

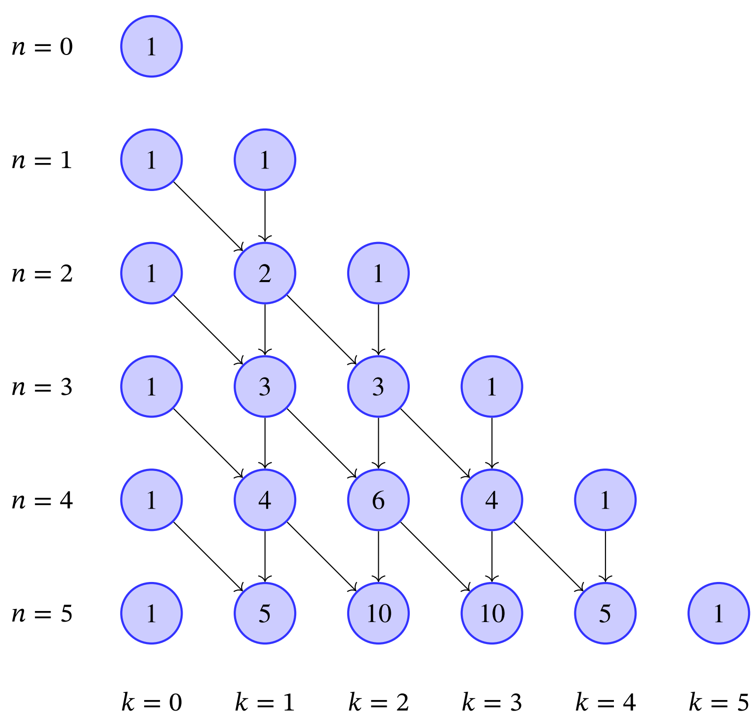
Relation utile Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $k \leq n$.

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Remarque. Ces relations sont encore vraies sans condition sur k et n si l'on convient que $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$.

Triangle de Pascal

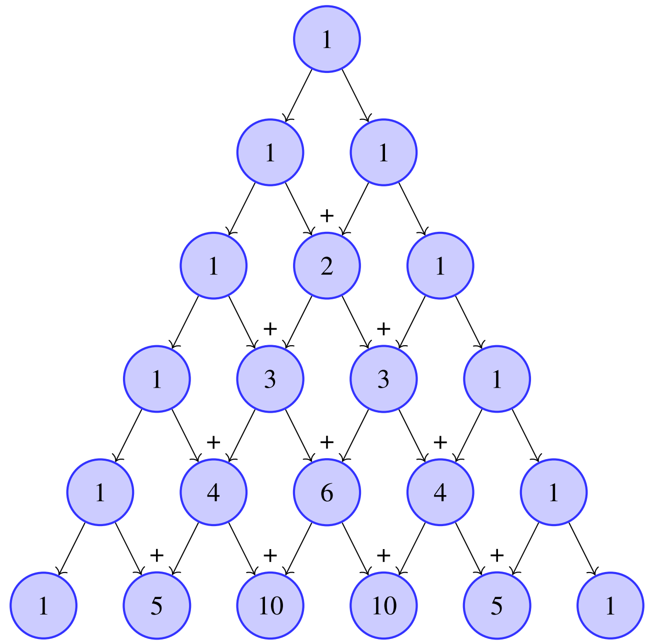
La relation de Pascal permet de construire le triangle de Pascal donnant les coefficients binomiaux de proche en proche.



On obtient une case en additionnant la case au-dessus et la case au-dessus à gauche : par exemple, $10 = 6+4$ ou $3 = 2+1$.

Dénombrement de chemins

Les coefficients binomiaux peuvent également s'interpréter en termes de dénombrement de chemins dans un arbre binaire. En effet, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ correspond aux nombres de chemins d'un arbre binaire de «profondeur» n dans lesquels on a choisi k fois la branche de gauche et donc $n-k$ fois la branche de droite.



2.3.2 Binôme de Newton

Proposition 2.5 Formule du binôme

Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple 2.2

On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$.

Exercice 2.2 ★

Calculer les sommes $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k}(-1)^k 2^{k-1}$

3 Sommes doubles

3.1 Définition et notations

On appelle somme double toute somme du type $\sum_{i=k}^{l}\sum_{j=m}^{n} a_{i,j}$. Par définition,

$$\sum_{i=k}^{l}\sum_{j=m}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=k}^{l} \mathrm{S}_i \quad \text{où} \quad \mathrm{S}_i = \sum_{j=m}^{n} a_{i,j}.$$

On peut aussi noter cette même somme

$$\sum_{\substack{k\leq i\leq l\\ m\leq j\leq n}} a_{i,j} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{(i,j)\in[\![k,l]\!]\times[\![m,n]\!]} a_{i,j}$$

Si les bornes des dans les sommes sont identiques on a une notation plus condensée. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$$

Attention, les bornes de la deuxième somme peuvent dépendre de l'indice de la première somme. Par exemple,

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}$$

Mais l'inverse n'arrive **JAMAIS** ou alors on a fait une erreur.
On peut aussi avoir des notations plus condensées dans ce cas. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$$

3.2 Règles de calcul

Ce sont les mêmes que pour une somme simple. Remarquons que l'on peut mettre en facteur dans la deuxième somme toute expression qui ne dépend pas du deuxième indice. C'est-à-dire,

$$\sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} a_i b_{i,j} = \sum_{i\in\mathrm{I}}\left(a_i \sum_{j\in\mathrm{J}} b_{i,j}\right)$$

Cette dernière remarque nous permet de factoriser une double somme lorsqu'on peut **séparer** les indices :

$$\sum_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} a_i b_j = \sum_{i\in\mathrm{I}}\left(\sum_{j\in\mathrm{J}} a_i b_j\right) = \sum_{j\in\mathrm{J}}\left(\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i b_j\right) = \left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_j b_j\right)$$

Exercice 3.1

Calculer $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$.

3.3 Interversion des signes $\sum$

Si les bornes ne dépendent pas des indices, on peut intervertir les signes $\sum$ sans se poser de questions.

$$\sum_{i=k}^{l}\sum_{j=m}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=k}^{l} a_{i,j}$$

Sinon, les choses sont un peu plus délicates et on visualise souvent mieux la situation au moyen d'un tableau.

Méthode **Interversion au moyen d'un tableau**

Interversion du signe $\sum$ dans $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$.

Dans le tableau ci-contre, on peut faire la somme des éléments

- **ligne par ligne** : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$
- **colonne par colonne** : $\sum_{j=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$

Ces deux doubles sommes sont donc égales. Rien d'étonnant à cela puisqu'on peut réécrire ces deux sommes comme $\sum_{0\le j\le i\le n} a_{i,j}$.

i \ j	0	1	2	3	4	…
0	$a_{0,0}$					
1	$a_{1,0}$	$a_{1,1}$				
2	$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$			
3	$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$		
4	$a_{4,0}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	
$\vdots$						

Exercice 3.2

Écrire de deux manières différentes $\sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}$.

Exercice 3.3

Vérifier que $\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k$ et donner une expression simple de cette somme en intervertissant l'ordre de sommation.

3.4 Sommation par paquets

3.4.1 Premier exemple

Soit par exemple à calculer la somme double $\mathrm{S} = \sum_{1\le i,j\le n} \max(i,j)$. On peut séparer séparer cette somme en trois «paquets» : ceux pour lesquels $i<j$, ceux pour lesquels $i>j$ et ceux pour lesquels $i=j$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= \sum_{1\le i<j\le n} \max(i,j) + \sum_{1\le j<i\le n} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} \max(i,i)\\ &= \sum_{1\le i<j\le n} j + \sum_{1\le j<i\le n} i + \sum_{i=1}^{n} i\end{aligned}$$

Les deux premières sommes sont les mêmes (on a juste permuté i et j) et

$$\sum_{1\le i<j\le n} j = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{j=2}^{n}(j-1)j = (\mathrm{S}_2(n)-1)-(\mathrm{S}_1(n)-1) = \mathrm{S}_2(n)-\mathrm{S}_1(n)$$

Par conséquent,

$$\mathrm{S} = 2(\mathrm{S}_2(n)-\mathrm{S}_1(n)) + \mathrm{S}_1(n) = 2\mathrm{S}_2(n)-\mathrm{S}_1(n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

3.4.2 Deuxième exemple

Soit maintenant à calculer la somme double $\sum_{1\le i,j\le n} |i-j|$. Remarquons que $|i-j|$ peut prendre des valeurs de 0 à $n-1$ donc

$$\sum_{1\le i,j\le n} |i-j| = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|i-j|=k} k = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{|i-j|=k} k$$

Reste à trouver le nombre de couples (i, j) tels que $|i-j| = k$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ (le cas $k = 0$ ne change pas la somme).

On construit le tableau des $|i-j|$ pour $n = 5$. On voit qu'on retrouve n fois la valeur 0 (mais elle ne nous intéresse pas) et $2(n-k)$ fois la valeur k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

0	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	0	1
4	3	2	1	0

On en déduit donc que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |i-j| = \sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)k = 2n\mathrm{S}_1(n-1) - 2\mathrm{S}_2(n-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

4 Produits

4.1 Le symbole $\prod$

Notation 4.1

Soit I un ensemble **fini** et $(a_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$. On note $\prod_{i \in \mathrm{I}} a_i$ le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{I}}$.

Remarque. L'associativité et la commutativité de la loi $\times$ sur $\mathbb{K}$ permet de définir correctement cette somme. Elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme les termes.

Remarque. Si $\mathrm{I} = \varnothing$, on convient que $\prod_{i \in \mathrm{I}} a_i = 1$ (élément neutre pour la loi $\times$).

Notation 4.2

Soient m et n deux entiers naturels. Alors

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m a_{m+1} \dots a_{n-1} a_n & \text{si } m \leq n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut aussi noter $\prod_{m \leq k \leq n} a_k$ ou encore $\prod_{k \in [\![m,n]\!]} a_k$. Ce produit comporte $n - m + 1$ **facteurs**.

Attention ! Les éléments intervenant dans un produit sont appelés des facteurs et non des termes. On parle de termes lorsqu'on manipule des sommes.

Exercice 4.1

Calculer $\prod_{k=0}^{n} 2$.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler qu'un produit est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

Exercice 4.2

Calculer $\prod_{k=-1000}^{1000} k \ln(1 + |k|)$.

4.2 Règles de calcul

$$\prod_k a_k b_k = \left(\prod_k a_k\right)\left(\prod_k b_k\right)$$

et par récurrence

$$\prod_k a_k^n = \left(\prod_k a_k\right)^n \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

et si les a_k sont **tous non nuls**

$$\prod_k a_k^n = \left(\prod_k a_k\right)^n \qquad \text{pour } n \in \mathbb{Z}$$

Enfin, en utilisant les propriétés de l'exponentiation, si les a_k sont **tous strictement positifs**

$$\prod_k a_k^\lambda = \left(\prod_k a_k\right)^\lambda \qquad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}$$

Attention ! On ne peut **JAMAIS** mettre en facteur une expression dans un produit même si elle ne dépend pas de l'indice de sommation. Autrement dit, en général,

$$\prod_k \lambda a_k \neq \lambda \prod_k a_k$$

Cependant, on peut écrire

$$\prod_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^n a_k$$

puisque le facteur λ apparaît n fois dans le produit.

4.3 Produit télescopique

On a le même type de remarque que pour les sommes

$$\prod_{k=m}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_m}$$

en supposant tous les v_k non nuls.

Exercice 4.3

Calculer $\displaystyle\prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1}$ et $\displaystyle\prod_{k=29}^{79} \frac{2k+1}{2k-1}$.

4.4 Passage au logarithme

On peut facilement se ramener à une somme en remarquant que

$$\ln\left(\prod_{k=m}^n a_k\right) = \sum_{k=m}^n \ln a_k$$

si tous les a_k sont **strictement positifs**.

Exercice 4.4

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.