Systèmes linéaires

1 Notion de système linéaire

Définition 1.1 Système linéaire

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** tout système d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

où $x_1, \dots, x_p$ sont des inconnues.

Exemple 1.1

Quelques exemples et contre-exemples.

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.
- $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 7x - 5y - 2z = 2 \end{cases}$ est un sytème linéaire de 2 équations à 3 inconnues.
- $\begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ z + y + 2 = -3x \\ 2x + 3y - 3 = 17z \end{cases}$ est un système d'équation linéaire de 3 équations à 3 inconnues.
- $\begin{cases} e^x + y = 1 \\ x + \sin(y) = 2 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.
- $\begin{cases} x^2 + 2y^3 = -3 \\ 2x^4 - y^5 = 2 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.

Interprétation géométrique

Cas $n = 2$ Les équations intervenant dans un système linéaire à deux inconnues sont de la forme $ax + by = c$. Sauf cas particulier où $(a, b) = (0, 0)$, ce sont des équations de droites du plan. L'ensemble des solutions d'un système linéaire à deux inconnues peut être interprété comme l'intersection de droites du plan.

Cas $n = 3$ Les équations intervenant dans un système linéaire à trois inconnues sont de la forme $ax + by + cz = d$. Sauf cas particulier où $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, ce sont des équations de plans de l'espace. L'ensemble des solutions d'un système linéaire à trois inconnues peut être interprété comme l'intersection de plans de l'espace.

2 Structure de l'ensemble des solutions

Définition 2.1 Système homogène associé à un système linéaire

On appelle système **homogène** associé au système linéaire

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{cases}$$

Remarque. En clair, on se débarasse des termes constants.

Exemple 2.1

Systèmes homogènes associés à quelques systèmes linéaires.

- Le système homogène associé au système $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$ est $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$.
- Le système homogène associé au système $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 7x - 5y - 2z = 2 \end{cases}$ est $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 7x - 5y - 2z = 0 \end{cases}$.
- Le système homogène associé au système $\begin{cases} x = y + 2z + 1 \\ z + y + 2 = -3x \\ 2x + 3y - 3 = 17z \end{cases}$ est $\begin{cases} x = y + 2z \\ z + y = -3x \\ 2x + 3y = 17z \end{cases}$.

Théorème 2.1 Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Les solutions d'un système linéaire sont les sommes d'une solution particulière de ce système et des solutions du système homogène associé.

Exemple 2.2

Le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 3x-y-z=-2 \end{cases}$ admet $(1,2,3)$ pour solution. Alors

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 3x-y-z=-2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 2x+y+z=2\times 1+2+3 \\ 3x-y-z=3\times 1-2-3 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} 2(x-1)+(y-2)+(z-3)=0 \\ 3(x-1)-(y-2)-(z-3)=0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi (x,y,z) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $(x-1,y-2,z-3)$ est une solution (u,v,w) du système homogène associé à $(\mathcal{S})$.
Ceci signifie que (x,y,z) est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si il existe une solution (u,v,w) du système homogène associé à $(\mathcal{S})$ tel que $(x,y,z)=(1+u,2+v,3+w)=(1,2,3)+(u,v,w)$.

3 Résolution d'un système linéaire

Notation 3.1 Opérations élémentaires

On notera $L_1,\dots,L_p$ les lignes d'un systèmes linéaires de p équations.

- Pour $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on notera $L_i\leftrightarrow L_j$ l'opération consistant à échanger les lignes L_i et L_j.
- Pour $i\in[\![1,n]\!]$ et $\lambda\neq 0$, on notera $L_i\leftarrow\lambda L_i$ l'opération consistant à multiplier la ligne L_i par λ.
- Pour $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ tel que $i\neq j$ et λ scalaire, on notera $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$ l'opération consistant à ajouter λ fois la ligne L_j à la ligne L_i.

Proposition 3.1

Tout système linéaire est changé par des opérations élémentaires en un système équivalent.

Remarque. Des opérations du type $L_i\leftarrow\lambda L_i+\mu L_j$ avec $\underline{\lambda\neq 0}$ transforme également un système en un système équivalent.

Méthode Formatage d'un système linéaire

Pour effectuer sans peine des opérations élémentaires sur un sytème linéaire, les inconnues doivent être placées en «colonnes».

Par exemple, le système linéaire $\begin{cases} x+z=2 \\ y-z=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ sera plutôt écrit $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 2 \\ & & y & - & z & = & -1 \\ x & + & 2y & & & = & 3 \end{array}\right.$.

On peut alors résoudre le système linéaire à l'aide de l'algorithme suivant.

Algorithme 1 Pivot de Gauss

Données : un système linéaire de n équations $(L_1, \dots, L_n)$ à p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$
Résultat : un système linéaire «triangulaire» équivalent au système initial.
Pour k variant de 1 à $\min(n, p)$ **Faire**
  Si il existe une ligne i où le coefficient de x_k est non nul **Alors**
    $L_k \leftrightarrow L_i$
    $a \leftarrow$ coefficient de x_k sur la ligne L_k (a est donc non nul)
    Pour j variant de $k+1$ à n **Faire**
      $b \leftarrow$ coefficient de x_k sur la ligne j
      $L_j \leftarrow L_j - \frac{b}{a} L_k$
    Fin Pour
  Fin Si
Fin Pour

Remarque. Le coefficient de x_k sur la ligne L_k à l'étape k de l'algoithme s'appelle le **pivot**.

A la fin de l'algorithme, on obtient un système «triangulaire» et plusieurs cas peuvent se présenter.

- Il existe une unique solution.
- Il n'existe aucune solution.
- Il existe une infinité de solutions.

4 Quelques exemples

Exemple 4.1

Résolution
On est dans un cas simple de pivot de Gauss où tous les pivots sont égaux à 1.

$$\begin{cases} x - y - 5z = -6 \\ 2x - y + z = 2 \\ -3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$
Le coefficient en position de pivot est égal à 1.

$$\iff \begin{cases} x - y - 5z = -6 \\ y + 11z = 14 \\ -y - 14z = -17 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix}$$
Le coefficient en position de pivot est encore égal à 1.

$$\iff \begin{cases} x - y - 5z = -6 \\ y + 11z = 14 \\ -3z = -3 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est le singleton $\{(2,3,1)\}$.
Interpération géométrique
L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

Exemple 4.2

Résolution
Si des pivots sont nuls, on procède à des échanges de lignes.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & & -3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{Le coefficient en position de pivot est nul.}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \text{On met un 1 en position de pivot.}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \text{Le coefficient en position de pivot est différent de 1.}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \\ & & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftrightarrow L_2 \qquad \text{On préfère un 1 en position de pivot.}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & & y & - & 2z & = & -2 \\ & & & & 5z & = & 1 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est le singleton $\left\{\left(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$.
Interpération géométrique
L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

Exemple 4.3

Résolution
Si des pivots ne sont pas égaux à 1, on utilise des opérations du style $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $\underline{\lambda \neq 0}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ -3x & - & y & - & 3z & = & -1 \\ -2x & + & 5y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} -4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ & - & 13y & - & 9z & = & -10 \\ & & 7y & + & 5z & = & 4 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} -4x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ & - & 13y & - & 9z & = & -10 \\ & & & & 2z & = & -18 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 13L_3 + 7L_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \\ z = -9 \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est le singleton $\{(7, 7, -9)\}$.
Interpération géométrique
L'ensemble des solutions est l'intersection de trois plans de l'espace donc un point (sauf cas particulier).

Exemple 4.4

Résolution

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} x + 4y - z = 3 \\ 2x + 3y - 5z = 2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + 4y - z = 3 \\ -5y - 3z = -4 \end{cases} && \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\
\iff &\begin{cases} x = -\frac{1}{5} + \frac{17}{5}z \\ y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}z \end{cases} && \text{On exprime les inconnues en fonction du paramètre } z.
\end{aligned}
$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(-\frac{1}{5} + \frac{17}{5}z, \frac{4}{5} - \frac{3}{5}z, z\right), z \in \mathbb{K}\right\}$$

En particulier, il existe donc une infinité de solutions (puisque z peut prendre une infinité de valeurs). Les solutions sont de la forme

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{\left(\frac{17}{5}z, -\frac{3}{5}z, z\right)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$$

Interprétation géométrique L'ensemble des solutions est l'intersection de deux plans de l'espace non parallèles donc une droite. Il s'agit en effet de la droite paramétrée par $\begin{cases} x = -\frac{1}{5} + \frac{17}{5}t \\ y = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ autrement dit de la droite passant par le point $\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ et de vecteur directeur $\left(\frac{17}{5}, -\frac{3}{5}, 1\right)$.

Exemple 4.5

Résolution

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \\ 4x - 5y = 2 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x + 2y = -3 \\ -7y = 7 \\ -13y = 14 \end{cases} && \begin{array}{l} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 4\mathrm{L}_1 \end{array} \\
\iff &\begin{cases} x + 2y = -3 \\ y = -1 \\ 13 = 14 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Structure de l'ensemble des solutions
Puisque manifestement $13 \neq 14$, l'ensemble des solutions est vide.
Interprétation géométrique Rien de surprenant : trois droites du plan sont rarement concourantes.

Exemple 4.6

Résolution

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x = 5 \\ 3x - y = 1 \\ -5x + 3y = 1 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \text{On préfère éliminer } y.$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est le singleton $\{(1, 2)\}$.
Interprétation géométrique On a donc ici affaire à trois droites concourantes.

Exemple 4.7

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + 4z = -3 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2 \qquad \text{On préfére un } -1 \text{ en position de pivot.}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 3y + 18z = 21 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ y + 6z = 7 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\iff \begin{cases} x = 9 - 11z \\ y = 7 - 6z \end{cases}$$

Structure de l'ensemble des solutions
L'ensemble des solutions est

$$\{(9 - 11z, 7 - 6z, z), z \in \mathbb{K}\}$$

En particulier, il existe donc une infinité de solutions (puisque z peut prendre une infinité de valeurs). Les solutions sont de la forme

$$\underbrace{(9, 7, 0)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{(-11z, -6z, z)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$$

Interprétation géométrique Trois plans de l'espace se coupent suivant la droite paramétrée par $\begin{cases} x = 9 - 11t \\ y = 7 - 6t \\ z = t \end{cases}$, c'est à dire la droite passant par le point $(9, 7, 0)$ et de vecteur directeur $(-11, -6, 1)$.