

TRIGONOMÉTRIE

1 Congruence

Définition 1.1 Congruence

Soient a, b et m trois réels. On dit que a et b sont **congrus modulo m** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$. On note alors $a \equiv b[m]$.

REMARQUE. En pratique, on a souvent $m = r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$.

Exemple 1.1

$$\frac{3\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Proposition 1.1 Propriétés de la congruence

Réflexivité Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $a \equiv a[m]$.

Symétrie Soit $(a, b, m) \in \mathbb{R}^3$. Alors $a \equiv b[m] \iff b \equiv a[m]$.

Transitivité Soit $(a, b, c, m) \in \mathbb{R}^4$. Si $a \equiv b[m]$ et $b \equiv c[m]$, alors $a \equiv c[m]$.

Somme Soit $(a, b, c, d, m) \in \mathbb{R}^5$. Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$, alors $a + c \equiv b + d[m]$.

Multiplication/division Soit $(a, b, m) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Alors $a \equiv b[m] \iff ka \equiv kb[km]$.

Projection Soit $(a, b, m) \in \mathbb{R}^3$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $a \equiv b[km]$, alors $a \equiv b[m]$.



ATTENTION! Si $a \equiv b[m]$ et $c \equiv d[m]$, on n'a pas nécessairement $ac \equiv bd[m]$.

Exemple 1.2

Si $a \equiv b[2\pi]$, alors $a \equiv b[\pi]$ mais la réciproque est fausse.

Exercice 1.1

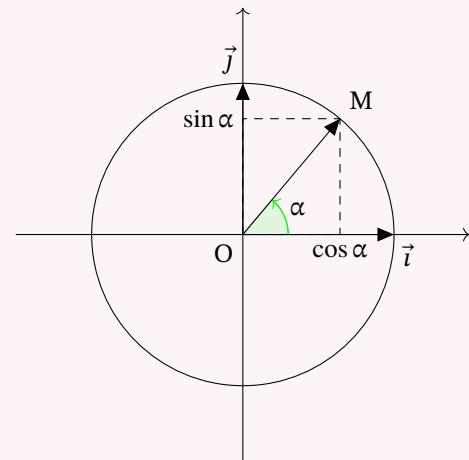
1. Déterminer un réel $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que $\frac{251\pi}{4} \equiv \alpha[2\pi]$.

2. Déterminer un réel $\beta \in [0, \pi[$ tel que $-\frac{37\pi}{3} \equiv \beta[\pi]$.

2 Fonctions trigonométriques

Définition 2.1 Cercle trigonométrique et fonctions trigonométriques

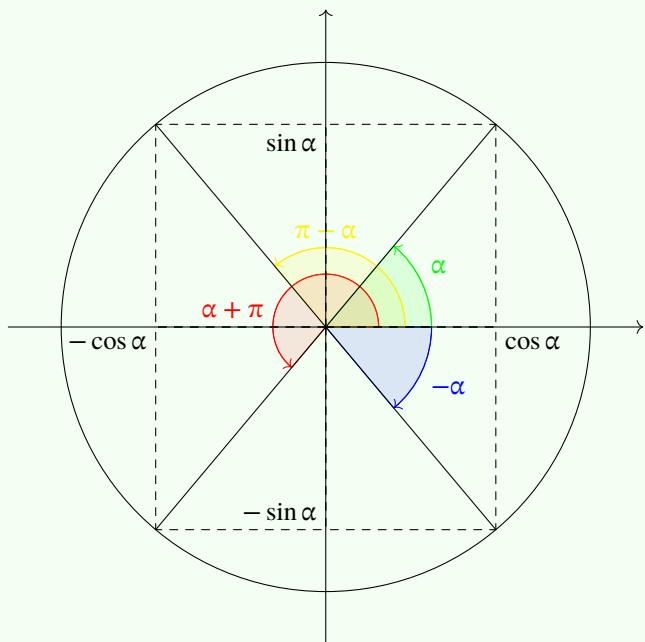
On suppose le plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 On appelle cercle trigonométrique le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.
 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ les coordonnées de l'unique point M de \mathcal{C} tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha[2\pi]$.



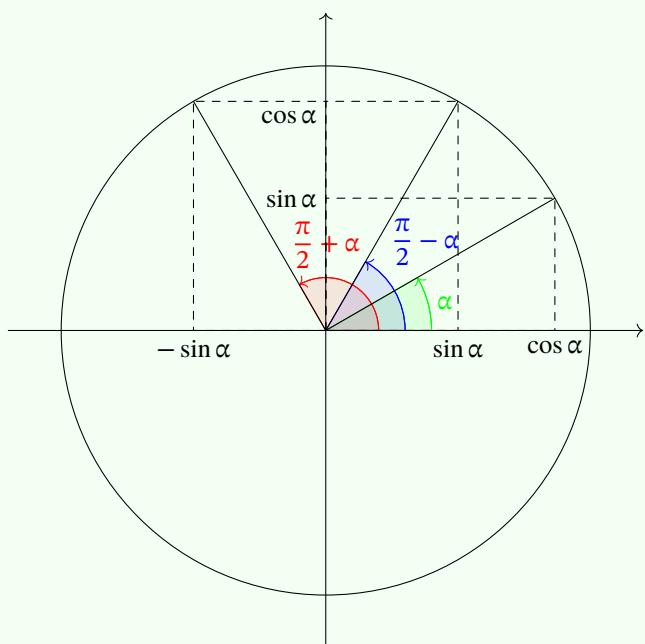
Proposition 2.1 Périodicité

Les fonctions sin et cos sont 2π -périodiques :

$$\forall (\alpha, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \begin{cases} \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha) \end{cases}$$

Proposition 2.2 Symétries

$$\begin{array}{ll} \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha) & \sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) & \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \end{array}$$



$$\begin{array}{ll} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \end{array}$$

Corollaire 2.1 Parité

Les fonctions cos et sin sont donc respectivement paire et impaire.

REMARQUE. On retiendra en particulier que pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,

$$\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos(\alpha)$$

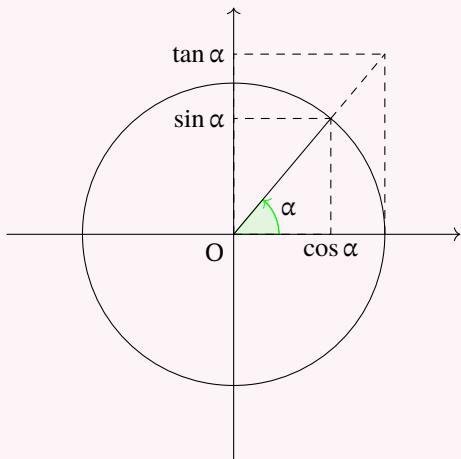
$$\sin(\alpha + n\pi) = (-1)^n \sin(\alpha)$$

On a alors évidemment $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$.

Définition 2.2 La fonction tangente

Soit α un réel non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

On pose $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

**Proposition 2.3 Ensemble de définition, périodicité et parité**

La fonction \tan est définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right)$.

Elle est π -périodique :

$$\forall (\alpha, k) \in I \times \mathbb{Z}, \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$$

La fonction \tan est impaire.

Angles usuels

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

Exercice 2.1

Calculer les quantités suivantes :

$$\cos \frac{217\pi}{6}$$

$$\sin \frac{2351\pi}{4}$$

$$\tan \frac{15548\pi}{3}$$

La fonction cotangente

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on pose $\cot(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

La fonction \cot est également π -périodique.

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$$

3 Formules usuelles

Proposition 3.1 Formules d'addition et de soustraction

Quand ces expressions ont un sens

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Corollaire 3.1 Formules de linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) - \sin(a - b))$$

Corollaire 3.2 Formules de duplication

Quand ces expressions ont un sens

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Corollaire 3.3 Formules de factorisation

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

Proposition 3.2 Paramétrage rationnel du cercle trigonométrique

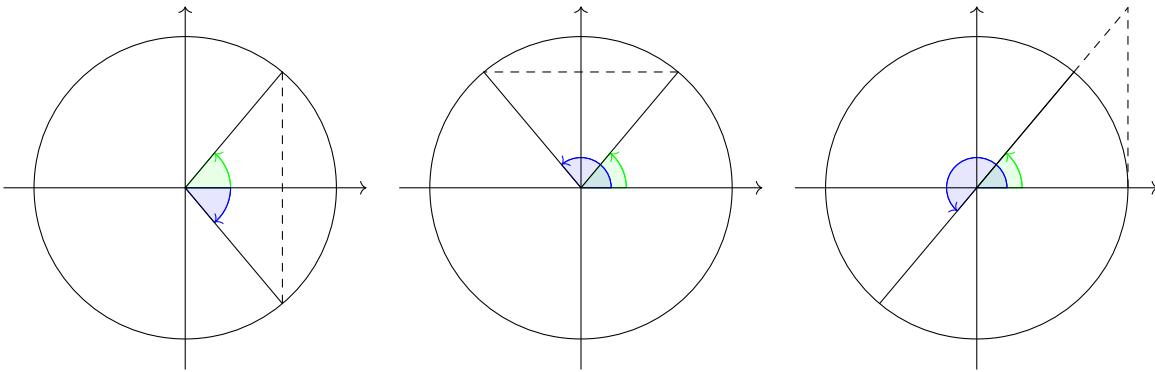
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$ et $t = \tan \frac{\theta}{2}$. Alors

$$\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1 + t^2}$$

REMARQUE. On parle de paramétrage **rationnel** puisque les coordonnées de tout point du cercle trigonométrique (excepté le point d'angle polaire π) s'expriment comme une fraction rationnelle (i.e. un quotient de polynômes) de la variable t .

4 Équations et inéquations trigonométriques

Équations trigonométriques

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv -b[2\pi] \end{cases}$$

$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b[2\pi] \\ \text{ou} \\ a \equiv \pi - b[2\pi] \end{cases}$$

$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow a \equiv b[\pi]$$

REMARQUE. Il est inutile d'apprendre par cœur les résultats précédents. La simple observation du cercle trigonométrique permet de les retrouver.

Exemple 4.1

Les solutions de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc $(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z})$.

Les solutions de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les réels de la forme $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc $(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z})$.

Les solutions de l'équation $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont les réels de la forme $-\frac{\pi}{6} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc $-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 4.1

Résoudre de deux manières différentes l'équation $\cos(x) = \sin(2x)$.

Inéquations trigonométriques

La simple visualisation du cercle trigonométrique permet de résoudre des inéquations trigonométriques.

Exemple 4.2

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x \leq \frac{1}{2}$ est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right]$ ou encore $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] + 2\pi\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right]$ ou encore $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] + 2\pi\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\tan x \geq -1$ est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$ ou encore $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] + \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 4.2

Résoudre l'inéquation $\cos x + \cos 3x \geq 0$.