Devoir à la maison n°02

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}(x) - \lambda \mathrm{F}(x+a) = f(x) \tag{$\star$}$$

Partie I – Questions préliminaires

I.1 Soit φ constante sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| = 0 \leq \mathrm{K}|x-y|$ quelque soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$. Ainsi $\varphi \in \mathcal{L}$.

I.2 cos et sin sont dérivables à dérivées bornées donc lipschitziennes.

I.3 Par définition, $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$. La fonction nulle est constante donc lipschitzienne.
Soient $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Il existe $(\mathrm{K}, \mathrm{L}) \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \mathrm{K}|x-y| \qquad \text{et} \qquad |\psi(x) - \psi(y)| \leq \mathrm{L}|x-y|$$

Par inégalité triangulaire, our tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|(\lambda\varphi+\mu\psi)(x)-(\lambda\varphi+\mu\psi)(y)| = |\lambda(\varphi(x)-\varphi(y))+\mu(\psi(x)-\psi(y))| \leq |\lambda||\varphi(x)-\varphi(y)|+|\mu||\psi(x)-\psi(y)| \leq (|\lambda|\mathrm{K}+|\mu|\mathrm{L})|x-y|$$

On a donc bien $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{L}$.
$\mathcal{L}$ est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

I.4 Puisque $\varphi \in \mathcal{L}$, il existe $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \mathrm{K}|x-y|$$

En particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \mathrm{K}|t|$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\varphi(t)| \leq \mathrm{K}|t| + |\varphi(0)|$$

Il suffit alors de poser $\mathrm{A} = \mathrm{K}$ et $\mathrm{B} = |\varphi(0)|$.

I.5 **I.5.a** C'est du cours.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

I.5.b Par croissance comparées, $q^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $nq^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente à termes positifs, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nq^n$ converge.

I.6 **I.6.a** Puisque $|\lambda e^{ia}| = |\lambda| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e^{nia}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{ina} = \frac{1}{1-\lambda e^{ia}}$. Par conséquent, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{i(x+na)} = \frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}$.

I.6.b Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n \cos(x+na)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n \sin(x+na)$ sont les parties réelle et imaginaire de la série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n e^{i(x+na)}$ donc ce sont des séries convergentes. De plus, leurs sommes sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}}$. Or

$$\frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}} = \frac{e^{ix}(1-\lambda e^{-ia}}{(1-\lambda e^{ia})(1-\lambda e^{-ia})} = \frac{e^{ix}-\lambda e^{i(x-a)}}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$$

On en déduit les résultats demandés.

Partie II – Etude de ($\star$) lorsque f est nulle et $|\lambda| \neq 1$

On suppose dans cette partie que f est nulle sur $\mathbb{R}$ et $|\lambda| \neq 1$.

II.1 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque F vérifie ($\star$) et que f est nulle, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\lambda^k \mathrm{F}(x+ka) - \lambda^{k+1}\mathrm{F}(x+(k+1)a) = 0$$

Puis, via un télescopage

$$\mathrm{F}(x) - \lambda^n \mathrm{F}(x+a) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mathrm{F}(x+ka) - \lambda^{k+1}\mathrm{F}(x+(k+1)a) = 0$$

De la même manière pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\lambda^{-k} f(x-ka) = \lambda^{-k}k\mathrm{F}(x-ka) - \lambda^{-(k-1)}\mathrm{F}(x-(k-1)a)$$

Puis, via un télescopage

$$\lambda^{-n}\mathrm{F}(x-na) - \mathrm{F}(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k}k\mathrm{F}(x-ka) - \lambda^{-(k-1)}\mathrm{F}(x-(k-1)a) = 0$$

On en déduit les égalités demandées.

II.2 D'après la question **I.4**, il existe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |\mathrm{F}(t)| \leq \mathrm{A}|t| + \mathrm{B}$$

Fixons alors $x \in \mathbb{R}$.
Supposons $|\lambda| < 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathrm{F}(x)| = |\lambda|^n|\mathrm{F}(x+na)| \leq |\lambda|^n(\mathrm{A}|x+na| + \mathrm{B}) \leq \mathrm{A}|a|n|\lambda|^n + (\mathrm{A}|x| + \mathrm{B})|\lambda|^n$$

Puisque $|\lambda| < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda|^n = \lim_{n\to+\infty} n|\lambda|^n = 0$$

de sorte que $\mathrm{F}(x) = 0$.
Supposons $|\lambda| > 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mathrm{F}(x)| = |\lambda|^{-n}|\mathrm{F}(x-na)| \leq |\lambda|^{-n}(\mathrm{A}|x-na| + \mathrm{B}) \leq \mathrm{A}|a|n|\lambda|^{-n} + (\mathrm{A}|x| + \mathrm{B})|\lambda|^{-n}$$

Puisque $|\lambda| > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda|^{-n} = \lim_{n\to+\infty} n|\lambda|^{-n} = 0$$

de sorte que $\mathrm{F}(x) = 0$.
Finalement, F est bien nulle sur $\mathbb{R}$.

Partie III – Etude de ($\star$) lorsque $|\lambda| \neq 1$

III.1 Soit $(F, G) \in \mathcal{L}^2$ un couple éventuel de solutions de $(\star)$. D'après la question **I.3**, $H = F - G \in \mathcal{L}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) - \lambda H(x + a) = 0$$

La question **II.2** permet alors d'affirmer que $H = 0$ i.e. $F = G$.

III.2 **III.2.a** D'après la question **I.4**, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)| \leq A|t| + B$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda^n f(x + na)| = |\lambda|^n |f(x + na)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B) \leq A|a| n|\lambda|^n + (A|x| + B)|\lambda|^n$$

Puisque $|\lambda| < 1$, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n|\lambda|^n$ convergent donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda^n f(x + na)|$ converge i.e. la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n f(x + na)$ converge absolument.

III.2.b Puisque $f \in \mathcal{L}$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|F_0(x) - F_0(y)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n (f(x + na) - f(y + na)\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n |f(x + na) - f(y + na)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n K|(x + na) - (y + na)| = \frac{K|x - y|}{1 - |\lambda|}
\end{aligned}$$

Ainsi $F_0 \in \mathcal{L}$.

III.2.c Par définition de F_0, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F_0(x) - \lambda F_0(x + a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f(x + (n + 1)a) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x + na) = f(x)
\end{aligned}$$

Donc F_0 est bien solution de $(\star)$ et c'est l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ d'après la question **III.1**.

III.2.d Dans ce cas, l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \frac{1}{1 - \lambda}$$

III.2.e Dans le cas où $f = \cos$, l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x + na) = \frac{\cos x - \lambda \cos(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}$$

Dans le cas où $f = \sin$, l'unique solution de $(\star)$ appartenant à $\mathcal{L}$ est la fonction F_0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \sin(x + na) = \frac{\sin x - \lambda \sin(x - a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}$$

III.3 **III.3.a** Il suffit d'appliquer la question **III.2.a** en remplaçant λ par $\frac{1}{\lambda}$ et a par $-a$, ce qui est légitime car $\left|\frac{1}{\lambda}\right| < 1$.

III.3.b On prouve à nouveau que $F_0 \in \mathcal{L}$ comme dans **III.2.b**. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F_0(x) - \lambda F_0(x + a) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-(n-1)} f(x - (n - 1)a) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na) = f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi F_0 est bien solution de $(\star)$ et c'est la seule appartenant à $\mathcal{L}$ d'après la question **III.1**.