DEVOIR À LA MAISON N°05

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Partie I – Etude d'exemples

I.1 **I.1.a** Si $\alpha = 1$, on a évidemment $\gamma_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Sinon, $\gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$.

I.1.b Si $\alpha = 1$, (γ_n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
Si $\alpha = -1$, $\gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $0 \leq \gamma_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi (γ_n) converge vers 0.
Si $|\alpha| < 1$, alors $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{1-\alpha}$ donc (γ_n) converge vers 0.
Si $|\alpha| > 1$, alors $\gamma_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ donc (γ_n) diverge.

I.2 **I.2.a** On trouve $A^2 = A^\top$ et $A^3 = I_3$. On en déduit que $A^{3k} = I_3$, $A^{3k+1} = A$ et $A^{3k+2} = A^\top$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

I.2.b Posons $B_n = (n+1)C_n$. D'après la question précédente, $B_{n+3} = B_n + I_n + A + A^\top$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
B_{3n} &= B_0 + n(I_n + A + A^\top) = I_n + n(I_n + A + A^\top)\\
B_{3n+1} &= B_1 + n(I_n + A + A^\top) = I_n + A + n(I_n + A + A^\top)\\
B_{3n+2} &= B_2 + n(I_n + A + A^\top) = (n+1)(I_n + A + A^\top)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$C_{3n} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} \\ \frac{n}{3n+1} & \frac{n+1}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} \\ \frac{n}{3n+1} & \frac{n}{3n+1} & \frac{n+1}{3n+1} \end{pmatrix} \qquad C_{3n+1} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{3n+2} & \frac{n}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2} \\ \frac{n+1}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2} & \frac{n}{3n+2} \\ \frac{n}{3n+2} & \frac{n+2}{3n+2} & \frac{n+1}{3n+2} \end{pmatrix} \qquad C_{3n+2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On constate que les suites (C_{3n}), (C_{3n+1}) et (C_{3n+2}) convergent vers la même matrice $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On en déduit que (C_n) converge vers C.

I.2.c On a $C^2 = C$ donc $v^2 = v$, ce qui prouve que v est un projecteur. On a clairement $\operatorname{Im} v = \operatorname{vect}((1,1,1))$ et on voit que $\operatorname{Ker} v$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.

I.3 **I.3.a** On cherche une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} a & b \\ dC & d \end{pmatrix}$ telle que $AP = PD$. La condition $AP = PD$ équivaut au système

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}c = a \\ \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}d = -\frac{1}{6}b \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = c \\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d = -\frac{1}{6}d \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} a-c=0 \\ 3b+4d=0 \end{cases}$$

Il suffit par exemple de prendre $a=c=1$, $b=4$ et $d=-3$ i.e. $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ qui est inversible, de sorte qu'on a bien $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$.

I.3.b On trouve $\mathrm{P}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Par récurrence, on obtient $\mathrm{A}^k=\mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$. Or $\mathrm{D}^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$ et un calcul donne alors

$$\mathrm{A}^k=\begin{pmatrix} \frac{3}{7}+\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k & \frac{4}{7}-\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k \\ \frac{3}{7}-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k & \frac{4}{7}+\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k \end{pmatrix}$$

I.3.c On a $\mathrm{A}^k=\mathrm{U}+\left(-\frac{1}{6}\right)^k\mathrm{V}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ avec $\mathrm{U}=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}=\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

I.3.d On a donc

$$\mathrm{C}_n=\mathrm{U}+\frac{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{6}\right)}\mathrm{V}=\mathrm{U}+\frac{1}{n+1}\frac{6}{7}\left(1-\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)\mathrm{V}$$

I.3.e Comme $\left|-\frac{1}{6}\right|<1$, on montre que (C_n) converge vers $\mathrm{C}=\mathrm{U}$.

I.3.f On vérifie que $\mathrm{U}^2=\mathrm{U}$, ce qui prouve que $v^2=v$. v est donc un projecteur de $\mathbb{R}^2$. On a alors $\operatorname{Im}v=\operatorname{vect}((1,1))$ et $\operatorname{Ker}v$ est la droite d'équation $3x+4y=0$.

Partie II – Etude de (C_n) lorque A est r-périodique

II.1 **II.1.a** Posons $z_k=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{r-1}\alpha_{k+l}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En utilisant, la périodicité de (α_k), on montre que $z_{k+1}=z_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Ainsi la suite (z_k) est constante égale à $z_0=\gamma$.

II.1.b Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\beta_{n+r}&=\sum_{k=0}^{n+r}\alpha_k-\frac{n+r+1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\\
&=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k-\frac{n+1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k+\sum_{k=n+1}^{n+r}\alpha_k-\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\\
&=(n+1)\gamma_n-(n+1)\gamma+\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_{n+1+k}-\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k\\
&=\beta_n+rz_{n+1}-r\gamma=\beta_n
\end{aligned}$$

en utilisant la question précédente. Ainsi (β_n) est r-périodique et est donc bornée comme toute suite périodique. En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\min_{0\le k\le r-1}\beta_k\le\beta_n\le\max_{0\le k\le r-1}\beta_k$$

II.1.c Pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\gamma_n=\gamma+\frac{\beta_n}{n+1}$$

Comme (β_n) est bornée, (γ_n) converge vers γ.

II.2 **II.2.a** Puisque $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_p$, $\mathrm{A}^{k+r} = \mathrm{A}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\alpha_{k+r} = a_{i,j}(\mathrm{A}^{k+r}) = a_{i,j}(\mathrm{A}^k) = \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite (α_k) est donc r-périodique. Avec les notations de la question précédente, on a $\gamma_n = c_{i,j}(\mathrm{C}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or on a montré que (γ_n) converge vers γ. Or

$$\gamma = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}c_{i,j}(\mathrm{A}^k) = c_{i,j}\left(\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\mathrm{A}^k\right)$$

Ceci montrer que (C_n) converge vers

$$\mathrm{C} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\mathrm{A}^k$$

II.2.b Comme A et I_p commutent

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^r - \mathrm{I}_p &= (\mathrm{A}-\mathrm{I}_p)\left(\sum_{k=0}^{r-1}\mathrm{A}^k\right) = r(\mathrm{A}-\mathrm{I}_p)\mathrm{C}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{r-1}\mathrm{A}^k\right)(\mathrm{A}-\mathrm{I}_p) = r\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{I}_p)\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_p$ et $r \neq 0$, $\mathrm{AC} = \mathrm{CA} = \mathrm{C}$.

II.2.c Puisque $\mathrm{AC} = \mathrm{C}$, on montre par récurrence que $\mathrm{A}^k\mathrm{C} = \mathrm{C}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{C}^2 = \frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{r-1}\mathrm{A}^k\right)\mathrm{C} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\mathrm{A}^k\mathrm{C} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\mathrm{C} = \mathrm{C}$$

On en déduit que $v^2 = v$ et v est donc un projecteur.
On a $\mathrm{AC} = \mathrm{C}$, ce qui signifie $u \circ v = v$ ou encore $(u - \mathrm{Id}) \circ v = 0$ et donc $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Alors $u(x) = x$ puis $u^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$v(x) = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}u^k(x) = x$$

et donc $x \in \operatorname{Im} v$. Ainsi $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) \in \operatorname{Im} v$. Finalement $\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \operatorname{Im} v$.
De même, $\mathrm{CA} = \mathrm{C}$, ce qui sigifie que $v \circ u = v$ ou encore $v \circ (u - \mathrm{Id}) = 0$ et donc $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker} v$. Mais on a également $\operatorname{rg} v = \dim \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$ d'après ce qui précède. Le théorème du rang permet donc d'affirmer que $\operatorname{rg}(u - \mathrm{Id}) = \dim \operatorname{Ker} v$ puis que $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} v$.

II.3 **II.3.a** La suite (α'_k) est r-périodique. La suite (γ'_n) qui lui est associée converge donc vers

$$\gamma' = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\alpha'_k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\gamma'_n - \gamma_n &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha'_k - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=m}^{n+m}\alpha_k - \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=n+1}^{n+m}\alpha_k - \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\right)\\ &= \frac{1}{n+1}(y_n - \mathrm{K})\end{aligned}$$

avec $y_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+m}\alpha_k$ et $\mathrm{K} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k$. La suite (y_n) est r-périodique donc bornée. On en déduit que la $(\gamma'_n - \gamma_n)$ converge vers 0. Ainsi (γ_n) converge vers

$$\gamma' = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1}\alpha_k$$

II.3.b Soit $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$. La suite de terme général $\alpha_k = c_{i,j}(\mathrm{A}^k)$ est r-périodique à partir du rang m. D'après la question précédente, la suite (γ_n) qui lui est associée converge vers γ' en gardant les mêmes notations. Ceci montre que (C_n) converge vers

$$\mathrm{C} = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} \mathrm{A}^k$$

II.3.c Comme A et I_p commutent

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{m+r} - \mathrm{A}^m &= (\mathrm{A} - \mathrm{I}_p)\left(\sum_{k=m}^{m+r-1} \mathrm{A}^k\right) = r(\mathrm{A} - \mathrm{I}_p)\mathrm{C}\\ &= \left(\sum_{k=m}^{m+r-1} \mathrm{A}^k\right)(\mathrm{A} - \mathrm{I}_p) = r\mathrm{C}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_p)\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{A}^{m+r} = \mathrm{A}^m$ et $r \neq 0$, $\mathrm{AC} = \mathrm{CA} = \mathrm{C}$.
Puisque $\mathrm{AC} = \mathrm{C}$, on montre par récurrence que $\mathrm{A}^k\mathrm{C} = \mathrm{C}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que

$$\mathrm{C}^2 = \frac{1}{r}\left(\sum_{k=m}^{m+r-1} \mathrm{A}^k\right)\mathrm{C} = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} \mathrm{A}^k\mathrm{C} = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} \mathrm{C} = \mathrm{C}$$

On en déduit que $v^2 = v$ et v est donc un projecteur.
On a $\mathrm{AC} = \mathrm{C}$, ce qui signifie $u \circ v = v$ ou encore $(u - \mathrm{Id}) \circ v = 0$ et donc $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. Alors $u(x) = x$ puis $u^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$v(x) = \frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1} u^k(x) = x$$

et donc $x \in \mathrm{Im}\, v$. Ainsi $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \in \mathrm{Im}\, v$. Finalement $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, v$.
De même, $\mathrm{CA} = \mathrm{C}$, ce qui sigifie que $v \circ u = v$ ou encore $v \circ (u - \mathrm{Id}) = 0$ et donc $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\, v$. Mais on a également $\mathrm{rg}\, v = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ d'après ce qui précède. Le théorème du rang permet donc d'affirmer que $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}\, v$ puis que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, v$.

Partie III – Etude de matrices stochastiques

III.1 Pour aller plus vite, on utilisera le fait que $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si M est à coefficients positifs et si $\mathrm{MU} = \mathrm{U}$ avec $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

III.1.a Puisque M et N sont à coefficients positifs et que λ et μ sont des réels positifs, $\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N}$ est à coefficients positifs. De plus, $(\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N})\mathrm{U} = \lambda\mathrm{MU} + \mu\mathrm{NU} = (\lambda + \mu)\mathrm{U} = \mathrm{U}$ car M et N sont stochastiques et car $\lambda + \mu = 1$. Ainsi $\lambda\mathrm{M} + \mu\mathrm{N}$ est stochastique.

> **Remarque.** On a en fait montré que $\mathcal{S}_p$ est une partie *convexe* de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

III.1.b Pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$,

$$c_{i,j}(\mathrm{MN}) = \sum_{k=1}^{p} c_{ik}(\mathrm{M})c_{kj}(\mathrm{N}) \geq 0$$

car M et N sont à coefficients positifs. De plus, $\mathrm{MNU} = \mathrm{MU} = \mathrm{U}$ car M et N sont stochastiques. Donc MN l'est également.

III.1.c Tout d'abord, on montre par récurrence que A^n est stochastique pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la question précédente.
$\mathrm{C}_0 = \mathrm{I}_p$ est stochastique. Supposons que C_n le soit pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathrm{C}_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\mathrm{C}_n + \dfrac{1}{n}\mathrm{A}^{n+1}$ est stochastique d'après la question **III.1.a**. Par récurrence, $\mathrm{C}_n \in \mathcal{S}_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que (C_n) admet une limite C. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, C_n est stochastique, on a

- $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $c_{i,j}(\mathrm{C}_n) \geq 0$.
- $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} c_{i,j}(\mathrm{C}_n) = 1$.

Par passage à la limite,

- $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $c_{i,j}(\mathrm{C}) \geq 0$.
- $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} c_{i,j}(\mathrm{C}) = 1$.

Ainsi C est stochastique.

III.2 **III.2.a** Supposons M déterministe. La somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Comme tous les coefficients valent 0 ou 1, un seul des coefficients de chaque ligne vaut 1 et les autres valents 0.
Réciproquement si tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1, alors M est bien déterministe.

III.2.b Il y a p choix possibles pour la position du seul coefficient 1 pour chacune des p lignes d'une matrice déterministe. On en déduit que card $\mathcal{D}_p = p^p$.

III.2.c MN est stochastique d'apès la question **III.1.b**. De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$

$$c_{i,j}(\mathrm{MN}) = \sum_{k=1}^{p} c_{ik}(\mathrm{M})c_{kj}(\mathrm{N}) \in \mathbb{N}$$

La somme des coefficients de chaque ligne de MN valant 1 et chacun de ces coefficients étant entier naturel, un seul d'entre eux vaut 1 et les autres sont nuls. Ceci prouve que MN est déterministe.

III.2.d La suite (A^k) est à valeurs dans $\mathcal{D}_p$ d'après la question précédente. Comme $\mathcal{D}_p$ est un ensemble fini, la suite (A^k) ne peut être injective. Il existe donc des entiers naturels m et n tels que $m < n$ et $\mathrm{A}^m = \mathrm{A}^n$. Posons $r = n - m \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathrm{A}^{m+r} = \mathrm{A}^m$ i.e. A est donc r-périodique à partir du rang m.
Si A est inversible, alors en multipliant l'égalité $\mathrm{A}^{m+r} = \mathrm{A}^m$ par $(\mathrm{A}^{-1})^m$, on obtient $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_p$, ce qui prouve que A est r-périodique.

III.2.e Chaque colonne de A contient au moins un coefficient égal à 1 sinon une colonne de A serait nulle, ce qui contredirait son inversibilité. Comme A contient un seul coefficient égal à 1 par ligne, elle contient en tout p coefficients égaux à 1. On en déduit que chaque colonne de A contient exactement un coefficient égal à 1, les autres étant nuls.
On voit alors que $\mathrm{AA}^\top = \mathrm{I}_p$, ce qui prouve que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^\top$. Les coefficients de $\mathrm{A}^\top$ sont tous égaux à 0 ou 1 et comme chaque colonne de $\mathrm{A}^\top$ contient exactement un coefficient égal à 1, chaque ligne de $\mathrm{A}^\top$ contient exactement un coefficient égal à 1. Ceci prouve que $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^\top$ est déterministe. Comme A^{-1} est évidemment inversible, $\mathrm{A}^{-1} \in \Delta_p$.

> **Remarque.** Comme le produit de deux matrices déterministes inversibles et une matrice déterministe (d'après **III.2.c**) inversible et que $\mathrm{I}_n \in \Delta_p$, on voit que Δ_p est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$.
> Les matrices déterministes inversibles sont aussi appelées matrices de permutation. Je vous laisse deviner pourquoi.

III.3 D'après la question **III.2.d**, A est r-périodique à partir d'un certain rang m. D'après les questions **II.3.b** et **II.3.c**, (C_n) converge vers une matrice C telle que $\mathrm{C}^2 = \mathrm{C}$. D'après la question **III.1.c**, $\mathrm{C} \in \mathcal{S}_p$.

III.4 **III.4.a** Puisque $\mathrm{XY} = \mathrm{I}_p$, X et Y sont inversibles.

III.4.b Soit $j \in [\![1,p]\!]$. D'une part,

$$c_{jj}(\mathrm{XY}) = \sum_{k=1}^{p} c_{jk}(\mathrm{X})c_{kj}(\mathrm{Y}) \leq \mu_j \sum_{k=1}^{p} c_{jk}(\mathrm{X}) = \mu_j$$

Puisque $c_{jj}(\mathrm{XY}) = c_{jj}(\mathrm{I}_p) = 1$, on a $\mu_j \geq 1$. D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{p} c_{i,j}(\mathrm{Y}) = 1$$

et $c_{i,j} \geq 0$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ donc $c_{i,j} \leq 1$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. On en déduit que $\mu_j \leq 1$.
Finalement $\mu_j = 1$.

III.4.c Soit $j \in [\![1,p]\!]$. Puisque $\mu_j = 1$, un des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ ligne vaut 1. Puisque Y est stochastique, la somme des coefficients de cette ligne vaut 1 et, puisque tous les autres coefficients de cette ligne sont positifs, ils sont nuls.
Les coefficients de Y valent donc tous 0 ou 1 et chaque ligne de Y contient exactement un coefficient égal à 1, ce qui prouve que Y est déterministe. Ainsi $\mathrm{Y} \in \Delta_p$ puisque Y est également inversible.
Puisque $\mathrm{XY} = \mathrm{I}_p$, $\mathrm{X} = \mathrm{Y}^{-1}$ est donc $\mathrm{X} \in \Delta_p$ d'après **III.2.e**.

III.4.d Posons $W = UV \in \Delta_p$. On a donc $W^{-1}UV = I_p$. D'après **III.2.e**, $W^{-1} \in \Delta_p$ et a fortiori $W^{-1} \in \mathcal{S}_p$. D'après **III.1.b**, $W^{-1}U \in \mathcal{S}_p$ et ce qui précède montre que $W^{-1}U \in \Delta_p$ et $V \in \Delta_p$. Enfin, $U = W(W^{-1}U) \in \mathcal{D}_p$ d'après **III.2.c** et U est inversible car W et $W^{-1}U$ le sont. Ainsi $U \in \Delta_p$.