Devoir à la maison n°08

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1 – Centrale Maths 1 MP 2023 – Sur le calcul ombral

Objectifs

Ce problème introduit le calcul ombral et propose d'en démontrer certains résultats. Historiquement, ce «calcul» reposait sur un ensemble de manipulations heuristiques sur les indices qui étaient traités comme des puissances. Pour justifier ces règles, une solution consiste à utiliser des endomorphismes agissant sur des polynômes. Ce problème a pour objectif de présenter ces règles et d'en déduire des identités polynomiales non triviales.

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Dans ce problème, on identifie polynômes formels et fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associées. On identifie de plus les éléments de $\mathbb{K}$ aux polynômes constants.
- Tout polynôme $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ s'écrit de manière unique
$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{X}^k$$
où (a_k) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. Si p n'est pas le polynôme nul, son degré $\deg(p)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Par convention, le degré du polynôme nul est -1 (cette convention est inhabituelle).
- Si n est un entier naturel, $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- On note $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$ sont les endomorphismes bijectifs (automorphismes) de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
- Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[\mathrm{X}])$ et $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on note $\mathrm{T}p = \mathrm{T}(p)$.
- D désigne l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$: $\forall p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{D}(p) = \mathrm{D}p = p'$.
- Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on définit la suite d'endomorphismes (T^k) par récurrence : $\mathrm{T}^0 = \mathrm{I}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}^{k+1} = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}^k = \mathrm{T}^k \circ \mathrm{T}$.

I Etude d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$

I.A

Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on pose $E_a(p) = E_a p = p(X + q)$.

1 Montrer que E_a est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

I.B

A tout $p \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction $J(p) = Jp$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J(p)(x) = Jp(x) = \int_x^{x+1} p(t)\ dt$$

2 Montrer que J est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3 Montrer que J conserve le degré et est inversible.

I.C

A tout $p \in \mathbb{K}[X]$, on associe la fonction $L(p) = Lp$ de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K},\ L(p)(x) = Lp(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t} p'(x+t)\ dt$$

4 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k\ dt$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ et calculer sa valeur.

5 Montrer que L est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il inversible ?

II Formule de Taylor pour les endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$

Soit T un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que :

- T est *shift-invariant* si, pour tout $a \in \mathbb{K}$, $E_a \circ T = T \circ E_a$;
- T est un *endomorphisme delta* si
- T est shift-invariant et si l'image du polynôme X par T est une constante non nulle : $TX \in \mathbb{K}^*$.

II.A

6 Soit $a \in \mathbb{K}$. Vérifier que les endomorphismes I et D sont shift-invariants, ainsi que les endomorphismes E_a, J et L définis dans la partie I. Sont-ils des endomorphismes delta ?

7 Montrer que l'ensemble des endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$. L'ensemble des endomorphismes delta de $\mathbb{K}[X]$ est-il stable par addition ? par composition ?

II.B

8 Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$, montrer que l'expression

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k D^k p$$

a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

On note alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k$ l'application de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ qui, à un polynôme $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, associe le polynôme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k p$.

9 Montrer que, pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k$ est un endomorphisme shift-invariant.

10 Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \mathrm{D}^k$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $q_n = \frac{\mathrm{X}^n}{n!}$. On se donne T un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

11 Montrer que T est un endomorphisme shift-invariant si et seulement si

$$\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{T}q_k)(0)\mathrm{D}^k$$

12 Montrer que deux endomorphismes shift-invariants de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ commutent.

II.C

Dans cette sous-partie, on applique le résultat de la question **11** aux endomorphismes de la partie I.

13 Pour $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, exprimer $\mathrm{J}p$ en fonction des dérivées $p^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) de p.

14 Démontrer que l'endomorphisme $\mathrm{D} - \mathrm{I}$ est inversible et exprimer L en fonction de $(\mathrm{D} - \mathrm{I})^{-1}$.

II.D

Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme non nul shift-invariant de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
On rappelle que le degré du polynôme nul est par convention égal à -1.

15 Montrer qu'il existe un entier naturel $n(\mathrm{T})$ tel que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$,

$$\deg(\mathrm{T}p) = \max\{-1, \deg(p) - n(\mathrm{T})\}$$

16 En déduire $\mathrm{Ker}(\mathrm{T})$ en fonction de $n(\mathrm{T})$.

17 Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(1) T est inversible ;

(2) $\mathrm{T}1 \neq 0$;

(3) $\forall p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}], \deg(\mathrm{T}p) = \deg(p)$.

18 Si ces conditions sont vérifiées, montrer que T^{-1} est encore un endomorphisme shift-invariant.

II.E

Dans cette sous-partie, T est un endomorphisme delta de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

19 Montrer qu'il existe une suite de scalaires $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$ et $\mathrm{T} = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k \mathrm{D}^k$.

20 Montrer qu'il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $\mathrm{T} = \mathrm{D} \circ \mathrm{U}$.
Préciser U dans le cas $\mathrm{T} = \mathrm{D}$, puis dans le cas $\mathrm{T} = \mathrm{L}$.

$\boxed{21}$ Pour tout polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ non nul, vérifier que $\deg(\mathrm{T}p) = \deg(p) - 1$. En déduire $\mathrm{Ker}(\mathrm{T})$ et le spectre de T.

$\boxed{22}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n la restriction de T à $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que T_n est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

$\boxed{23}$ Déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{T}_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que T est surjectif.

III Suite de polynômes associée à un endomorphisme delta

On souhaite montrer que, pour tout endomorphisme delta Q, il existe une unique suite de polynômes $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ telle que

- $q_0 = 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg q_n = n$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n(0) = 0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Q}q_n = q_{n-1}$.

Cette suite sera appelée *suite de polynômes associée* à l'endomorphisme delta Q.

III.A

Soit Q un endomorphisme delta.

$\boxed{24}$ Montrer l'existence et l'unicité de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à Q.

$\boxed{25}$ Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2,\ q_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y)$$

III.B

Réciproquement, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(q_n) = n$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2,\ q_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} q_k(x)q_{n-k}(y)$$

$\boxed{26}$ Montrer qu'il existe un unique endomorphisme delta dont $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes associée.

III.C

Soit Q un endomorphisme delta, soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q et soit n un entier naturel.

$\boxed{27}$ Montrer que la famille $(q_0, q_1, \dots, q_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

$\boxed{28}$ D'après la question **22**, Q induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ noté Q_n. Donner sa matrice dans la base précédente. En déduire sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

III.D

Dans cette sous-partie, on détermine la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes associée à certains endomorphismes.

29 Pour $\mathrm{Q} = \mathrm{D}$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \frac{\mathrm{X}^n}{n!}$$

30 Pour $\mathrm{Q} = \mathrm{E}_1 - \mathrm{I}$, vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-n+1)}{n!}$$

III.E

Cette sous-partie propose de généraliser la formule de Taylor démontrée dans la partie II. On se donne Q un endomorphisme delta et on note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q.

31 Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, l'expression $\sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{Q}^k p)(0) q_k$ a un sens et définit un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, puis que

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{Q}^k p)(0) q_k$$

32

33 En déduire que, pour tout endomorphisme shift-invariant T, on a

$$\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{T} q_k)(0) \mathrm{Q}^k$$

III.F

34 En choisissant $\mathrm{Q} = \mathrm{E}_1 - \mathrm{I}$, démontrer que, si p est un polynôme non constant, alors

$$p'(\mathrm{X}) = \sum_{k=1}^{\deg(p)} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} p(\mathrm{X}+j) \right)$$

C'est la *formule de dérivation numérique des polynômes*.

IV Un peu de calcul ombral

Si T est un endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on définit sa dérivée de Pincherle, notée T' comme l'endomorphisme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tel que,

$$\forall p \in \mathbb{K}[\mathrm{X}],\ \mathrm{T}'(p) = \mathrm{T}(\mathrm{X}p) - \mathrm{X}\mathrm{T}(p)$$

IV.A

Soient S et T deux endomorphismes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

35 Montrer que, s'il existe une suite (a_n) de scalaires telle que $\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k$, alors $\mathrm{T}' = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \mathrm{D}^{k-1}$.

36 Si T est un endomorphisme shift-invariant, montrer que T' est encore un endomorphisme shift-invariant.

37 Si T est un endomorphisme delta, montrer que T' est un endomorphisme shift-invariant et inversible.

38 Montrer que $(\mathrm{S} \circ \mathrm{T})' = \mathrm{S}' \circ \mathrm{T} + \mathrm{S} \circ \mathrm{T}'$.

IV.B

Soit Q un endomorphisme delta. On rappelle que d'après la partie II, il existe un unique endomorphisme U shift-invariant et inversible tel que $\mathrm{Q} = \mathrm{D} \circ \mathrm{U}$. On note $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes associée à Q au sens de la partie III.

39 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(\mathrm{Q}' \circ \mathrm{U}^{-n-1})(\mathrm{X}^n) = \mathrm{X}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^{n-1})$$

40 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n!q_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\mathrm{U}^{-n}(\mathrm{X}^{n-1})$$

puis que

$$nq_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{Q}')^{-1}(q_{n-1})$$