

# DEVOIR À LA MAISON N°09

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1 – CCP 2001 Maths2 MP - Utilisation des matrices compagnons

### Notations et définitions

- Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n$  est un entier naturel.
- Si  $u$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on note  $u^0 = \text{Id}_E$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u^{n+1} = u^n \circ u$ .
- On note  $\mathbb{K}_n[X]$  la  $\mathbb{K}$ -algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la  $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de matrice unité  $I_n$  et  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ; les éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont notés  $M = (m_{i,j})$ .
- Pour une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $A^T$  la transposée de la matrice  $A$ ,  $\text{rg}(A)$  son rang,  $\chi_A = \det(XI_n - A)$  son polynôme caractéristique et  $\text{Sp}(A)$  l'ensemble de ses valeurs propres.
- Si  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  est un polynôme unitaire de  $\mathbb{K}_n[X]$  on lui associe la **matrice compagnon**

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \cdot & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

(c'est-à-dire la matrice  $C_P = (c_{i,j})$  est définie par  $c_{i,j} = 1$  pour  $i - j = 1$ ,  $c_{i,n} = -a_{i-1}$  et  $c_{i,j} = 0$  dans les autres cas).

*Les parties II, III et IV utilisent les résultats de la partie I et sont indépendantes entre elles.*

### I Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  de  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $C_P$  sa matrice compagnon associée.

- 1 Montrer que  $C_P$  est inversible si et seulement si  $P(0) \neq 0$ .
- 2 Montrer que  $\chi_{C_P} = P$ .

- 3** Soit  $Q$  un polynôme de  $\mathbb{K}_n[X]$ , déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\chi_A = Q$ .
- 4** On note  $C_P^\top$  la transposée de la matrice  $C_P$ .
- 4.a** Justifier la proposition :  $\text{Sp}(C_P) = \text{Sp}(C_P^\top)$ .
- 4.b** Soit  $\lambda$  élément de  $\text{Sp}(C_P^\top)$ , déterminer le sous-espace propre de  $C_P^\top$  associé à  $\lambda$ .
- 4.c** Montrer que  $C_P^\top$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et a toutes ses racines simples.
- 4.d** On suppose que  $P$  admet  $n$  racines  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  deux à deux distinctes, montrer que  $C_P^\top$  est diagona-

lisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
 est non nul.

**5** Exemples :

**5.a** Déterminer une matrice  $A$  (dont on précisera la taille  $n$ ) vérifiant :

$$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999I_n$$

**5.b** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant :  $f^{n-1} \neq 0$  et  $f^n = 0$ . Montrer que l'on peut trouver une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est une matrice compagnon que l'on déterminera.

## II Localisation des racines d'un polynôme

Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on pose pour tout entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$r_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad D_i = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_i\}$$

Pour  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , on note  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

**6** Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ .

Montrer que pour tout entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$ .

**7** Démontrer que  $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$ .

**8** Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$  un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ . Etablir que toutes les racines de  $P$  sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$ .

**9** Application :

Soit  $a, b, c$  et  $d$  quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue  $n$  :

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

n'admet pas de solution sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

### III Suites récurrentes linéaires

On note  $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites de complexes et si  $u$  est une suite de  $E$ , on écrira  $u(n)$  à la place de  $u_n$  pour désigner l'image de  $n$  par  $u$ .

On considère le polynôme  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$  de  $\mathbb{C}[X]$  avec  $a_0 \neq 0$  et on lui associe le sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  formé des éléments  $u$  vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \dots - a_0u(n)$$

- 10** Montrer que si  $\lambda$  est racine de  $P$  alors la suite  $n \mapsto \lambda^n$  est élément de  $F$ .
- 11** Soit  $\varphi$  l'application de  $F$  vers  $\mathbb{C}^p$  définie par :  $u \mapsto (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$ . Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de  $F$ ?
- 12** Pour tout entier  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ , on définit les éléments  $e_i$  de  $F$  par :

$$\forall j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

**12.a** Déterminer  $e_i(p)$  pour  $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ .

**12.b** Montrer que le système de vecteurs  $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$  est une base de  $F$ .

**12.c** Soit  $u$  un élément de  $F$ , établir que  $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$ .

- 13** Si  $u$  est un élément de  $E$ , on définit l'élément  $f(u)$  de  $E$  par :  $f(u) : n \mapsto u(n+1)$ . Montrer que l'application  $f$  ainsi définie est un endomorphisme de  $E$  et que  $F$  est stable par  $f$ .
- 14** Si  $g$  est l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$ , montrer que la matrice de  $g$  dans la base  $(e_0, e_1, \dots, e_{p-1})$  est  $C_p^T$ .
- 15** On suppose que  $P$  admet  $p$  racines non nulles et deux à deux distinctes :  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ .
- 15.a** Déterminer une base de  $F$  formée de vecteurs propres de  $g$ .
- 15.b** En déduire que, si  $u$  est élément de  $F$ , il existe des constantes complexes  $k_0, k_1, \dots, k_{p-1}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \dots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n$$

- 16** *Exemple* : (On revient à la notation usuelle  $u_n$ )  
Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts. Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par  $u_0, u_1$  et  $u_2$  et par la relation de récurrence valable pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc$$

### IV Matrices vérifiant $\text{rg}(U - V) = 1$

Dans cette partie, pour une matrice  $A$ , on notera  $C_A$  la matrice compagnon du polynôme  $\chi_A$ .

- 17** Une matrice  $A$  est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon  $C_A$  ?

Pour tout couple  $(U, V)$  de matrices de  $GL_n(\mathbb{K})$ , on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

(\*) :  $\text{rg}(U - V) = 1$

(\*\*) : Il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $U = P^{-1}C_UP$  et  $V = P^{-1}C_VP$ .

- 18** Montrer qu'un couple  $(U, V)$  de matrices distinctes de  $GL_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $(**)$  vérifie  $(*)$ .
- 19** Déterminer un couple  $(U, V)$  de matrices de  $GL_2(\mathbb{K})$  ( $n = 2$ ) vérifiant  $(*)$  mais ne vérifiant pas  $(**)$  et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes  $\chi_U$  et  $\chi_V$ .

Dans la suite de cette partie,  $(U, V)$  est un couple de matrices de  $GL_n(\mathbb{K})$  vérifiant  $(*)$  et tel que  $\chi_U$  et  $\chi_V$  sont deux polynômes premiers entre eux.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et de base  $B$ . On désigne par  $u$  et  $v$  les automorphismes de  $E$  tels que  $U$  (respectivement  $V$ ) soit la matrice de  $u$  (respectivement  $v$ ) dans la base  $B$ .

Enfin on pose  $H = \text{Ker}(u - v)$ .

- 20** Montrer que  $H$  est un hyperplan vectoriel de  $E$ .
- 21** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel non nul de  $E$  stable par  $u$  et par  $v$  c'est-à-dire :

$$u(F) \subset F \quad \text{et} \quad v(F) \subset F$$

On notera  $u_F$  (respectivement  $v_F$ ) l'endomorphisme induit par  $u$  (respectivement  $v$ ) sur  $F$ .

On rappelle que  $\chi_{u_F}$  divise  $\chi_u$ .

- 21.a** Montrer que  $F$  n'est pas inclus dans  $H$ .
- 21.b** On suppose que  $F \neq E$ . Montrer que  $F + H = E$  puis que l'on peut compléter une base  $B_F$  de  $F$  par des vecteurs de  $H$  pour obtenir une base  $B'$  de  $E$ . En utilisant les matrices de  $u$  et  $v$  dans la base  $B'$ , montrer que l'on aboutit à une contradiction.
- 21.c** Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par  $u$  et par  $v$  ?

- 22** Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $G_j = \{x \in E, u^j(x) \in H\}$ .

**22.a** Montrer que les sous-espaces  $G_j$  sont des hyperplans vectoriels de  $E$ .

**22.b** Montrer que  $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j \neq \{0\}$ .

**22.c** Soit  $y$  un vecteur non nul de  $\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$ . On pose pour  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :  $e_j = u^j(y)$ .

Montrer que  $B'' = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$  est une base de  $E$ .

(On pourra considérer  $F = \text{vect}(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$  où  $p$  est le plus grand entier naturel non nul pour lequel la famille  $(y, u(y), \dots, u^{p-1}(y))$  est libre).

**22.d** Montrer que la matrice de  $u$  (respectivement  $v$ ) dans  $B''$  est  $C_U$  (respectivement  $C_V$ ).

**22.e** Conclure.

- 23** Application :

Soient  $u$  et  $v$  deux automorphismes d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  vérifiant :

$$\text{rg}(u - v) = 1, \chi_u(X) = X^n + 1 \text{ et } \chi_v(X) = X^n - 1$$

- 23.a** Montrer qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $u(e_i) = v(e_i) = e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $v(e_n) = -u(e_n) = e_1$ .
- 23.b** On note  $G$  le sous-groupe de  $GL(E)$  engendré par  $u$  et  $v$ . Montrer que  $\text{card } G \leq (2n)!$ . On pourra considérer l'ensemble  $X = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ .