

DEVOIR À LA MAISON N°15

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

Problème 1 – D'après E3A Maths A MP 2006

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0.

On désigne par $\mathcal{C}^0(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans \mathbb{R} et on note :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de I dans \mathbb{R} .

On note également $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(I)$ intégrables sur I et on pose

$$\forall f \in L^1(I), \|f\|_1 = \int_I |f|$$

On note enfin $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(I)$ telles que f^2 est intégrable sur I et on pose

$$\forall f \in L^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I f^2}$$

Partie I

- 1** Soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation différentielle $y' + cy = f$ admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, de classe \mathcal{C}^1 sur I et vérifiant $\varphi(f)(0) = 0$.
Démontrer que

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt$$

- 2** Prouver que l'application φ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose dans cette partie que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \leq 0 < b$.

- 3** Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq M_1 \|f\|_2 \leq M_2 \|f\|_\infty$$

- 4** Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty$$

5 Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq A \|f\|_1$$

En déduire que :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_1 \leq C \|f\|_1$$

6 Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq B \|f\|_2$$

En déduire que :

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K \|f\|_2$$

7 L'application φ de $\mathcal{C}^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue

7.a lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?

7.b lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?

7.c lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

8 Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

9 Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I . Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.

10 Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I . Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.

11 Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ et calculer sa norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_1$.

12 Soit $f \in L^2(I)$. On pose $g = \varphi(f)$. Démontrer que

$$\forall X > 0, \frac{g(X)^2}{2} + c \int_0^X g(t)^2 dt = \int_0^X f(t)g(t) dt$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ et calculer sa norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_2$.

Partie IV

I désigne maintenant un intervalle quelconque de \mathbb{R} contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I telles que f^2 et $(f')^2$ soient intégrables sur I .

13 **13.a** Démontrer que si f et g sont dans $H(I)$, alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I .

13.b Démontrer que l'application

$$\phi: \begin{cases} H(I)^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_I fg + \int_I f'g' \end{cases}$$

définit un produit scalaire.

13.c En déduire que l'application $\|\cdot\|_H$ définit par

$$\forall f \in H(I), \|f\|_H = \sqrt{\int_I f^2 + \int_I (f')^2}$$

est une norme sur $H(I)$.

14 On suppose, dans cette question, que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On pose

$$K = \{f \in H(I), f(0) = 0\}$$

14.a Démontrer que, pour tout $f \in L^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $L^2(I)$ et $\varphi(f)$ est dans K .
Démontrer que

$$\exists A > 0, \forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2$$

14.b Démontrer que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K .

14.c Démontrer que φ est continue de $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ dans $(K, \|\cdot\|_H)$.

14.d Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|\cdot\|_H)$ dans $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$.