Devoir à la maison n°17

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** Supposons que P et Q ne soient pas premiers entre eux. Alors leur pgcd n'est pas constant. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il possède une racine complexe qui est alors une racine commune de P et Q. On a donc bien prouvé le résultat voulu par contraposition.

1.b Supposons que P et Q divisent R. Il existe notamment $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R = AP$. Ainsi Q divise AP et $P \wedge Q = 1$, donc, d'après le théorème de Gauss, Q divise A. Il existe donc $B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = BQ$. Ainsi $R = AP = BPQ$ donc PQ divise R.

2 On note $\mathcal{P}_n$ l'assertion suivante :

Si $(P_1, \dots, P_n)$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$, alors, en notant $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$, $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}$.

$\mathcal{P}_1$ est clairement vraie. Soit alors $(P_1, \dots, P_{n+1})$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$. Posons $P = \prod_{i=1}^{n+1} P_i = \tilde{P}P_{n+1}$ en posant $\tilde{P} = \prod_{i=1}^{n} P_i$. On a donc

$$\frac{P'}{P} = \frac{\tilde{P}'P_{n+1} + \tilde{P}P_{n+1}'}{\tilde{P}P_{n+1}} = \frac{\tilde{P}'}{\tilde{P}} + \frac{P_{n+1}'}{P_{n+1}}$$

En appliquant $\mathcal{P}_n$ à $(P_1, \dots, P_n)$, on a

$$\frac{\tilde{P}'}{\tilde{P}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}$$

puis

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{P_i'}{P_i}$$

2.a La formule de Taylor est en fait inutile. On sait que si $P(a) = P'(a) = 0$, alors a est racine de P de multiplicité au moins 2. On en déduit que $(X-a)^2$ divise P.
Néanmoins on peut raisonner comme le préconise l'énoncé. En effet,

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Ainsi si $P(a) = P'(a) = 0$, alors

$$P = (X-a)^2 Q$$

où $Q = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2} \in \mathbb{R}[X]$ et donc $(X-a)^2$ divise P.

2.b La linéarité est triviale car la dérivation et l'évaluation sont linéaires. Soit alors $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors $P(x_k) = P'(x_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. D'après la question précédente, $(X - x_k)^2$ divise P pour tout $k \in [\![1, p]\!]$. Or les polynômes $(X - x_k)^2$ n'ont aucune racine commune puisque les x_k sont deux à deux distincts donc ils sont premiers entre eux deux à deux d'après la question **1**. D'après cette même question $Q = \prod_{k=1}^{p}(X - x_k)^2$ divise P. Or $\deg Q = 2p$ et $\deg P \leq 2p - 1$ donc P est nécessairement nul. On en déduit que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ puis que φ est injective. Puisque $\dim \mathbb{R}_{2p-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2p} = 2p$, φ est un isomorphisme.

2.c Par bijectivité de φ, il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $\varphi(P_H) = (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p)$, ce qui répond à la question.

$\boxed{3}$ La matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

En notant $U = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, la matrice du polynôme P_H dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est donc

$$A^{-1}U = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P_H = -\frac{1}{4} + X + \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{2}X^3$.

$\boxed{4}$ **4.a** Il est clair que $Q_i(x_k) = \delta_{i,k}$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
Si $k \neq I$, x_k est une racine double de Q_i donc $Q_i'(x_k) = 0$. De plus, d'après la question **2**,

$$\frac{Q_i'}{Q_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \frac{2}{X - x_j}$$

donc, en évaluant en x_i,

$$Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}$$

4.b Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Comme $Q_i(x_k) = \delta_{i,k}$, on a clairement $P(x_k) = a_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
De plus,

$$P' = \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i Q_i'(x_i))Q_i + \sum_{i=1}^{p} \left[\left(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i)\right) a_i + (X - x_i)b_i\right] Q_i'$$

A nouveau, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$,

$$P'(x_k) = b_k - a_k Q_k'(x_k) + a_k Q_k'(x_k) = b_k$$

Par injectivité de φ, P est donc bien le polynôme d'interpolation de Hermite recherché.

4.c Calcul laissé au lecteur. Désolé...

$\boxed{5}$ Puisque $\deg H_n' < \deg XH_n$, il est clair que H_{n+1} et H_n ont le même coefficient dominant et que $\deg H_{n+1} = \deg H_n + 1$. Comme H_0 est unitaire de degré 0, H_n est unitaire de degré n.

$\boxed{6}$ Une fois n'est pas coutume, on montre cette relation de récurrence par récurrence. Il est clair que $H_1 = X$ de sorte que $H_1' = 1 = H_0$. Supposons alors que $H_{n+1}' = (n+1)H_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$H_{n+2} = XH_{n+1} - H_{n+1}' = XH_{n+1} - (n+1)H_n$$

Ainsi

$$H_{n+2}' = XH_{n+1}' + H_{n+1} - (n+1)H_n' = (n+1)(XH_n - H_n') + H_{n+1} = (n+2)H_{n+1}$$

On en déduit bien par récurrence que $H_{n+1}' = (n+1)H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{7}$ **7.a** Tout d'abord $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$.
Notons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. Alors $P(x)Q(x)f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(x^{p+q}e{-}x^2/2)$. On sait que $t^{\frac{p+q}{2}}e^{-t/2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t)$ donc, en posant $t = x^2$, $t \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $x^{p+q}e{-}x^2/2 \underset{x\to\pm\infty}{=} o(1/x^2)$. A fortiori, $P(x)Q(x)f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} o(1/x^2)$. Ainsi $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable en $-\infty$ et $+\infty$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale définissant $\langle P \mid Q \rangle$ est donc bien définie.

7.b La symétrie de l'application $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ est claire. Sa bilinéarité provient de la linéarité de l'intégrale. Sa positivité provient de la positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{P}\rangle = 0$, alors, l'application $x \mapsto \mathrm{P}(x)^2 f(x)$ étant positive et continue sur $\mathbb{R}$, elle est nulle sur $\mathbb{R}$. Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, P est nul sur $\mathbb{R}$. Comme P possède alors une infinité de racines, il est nul.
L'application $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ est donc bien un produit scalaire.

$\boxed{8}$ **8.a** Soit $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$. Par intégration par parties :

$$\langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{Q}\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}'(x)\mathrm{Q}(x)f(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}'(x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Le crochet est nul par croissances comparées et $f'(x) = -xf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{Q}\rangle = -\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q}'\rangle + \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{XQ}\rangle$$

ou encore

$$\langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{XQ} - \mathrm{Q}'\rangle$$

Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle \mathrm{P}' \mid \mathrm{H}_{n-1}\rangle = \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{XH}_{n-1} - \mathrm{H}'_{n-1}\rangle = \langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle$$

On en déduit par récurrence que $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{P}^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$.

8.b Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On suppose $i < j$ sans perte de généralité. D'après la question précédente,

$$\langle \mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j\rangle = \langle \mathrm{H}_i^{(j)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$$

Or $j > i = \deg \mathrm{H}_i$ donc $\mathrm{H}_i^{(j)} = 0$ et $\langle \mathrm{H}_i \mid \mathrm{H}_j\rangle = 0$. La famille $(\mathrm{H}_0,\dots,\mathrm{H}_n)$ est donc orthogonale. Puisqu'elle ne contient pas le vecteur nul, elle est libre. Enfin $\dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = n+1$ donc $(\mathrm{H}_0,\dots,\mathrm{H}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

8.c On a également $\|\mathrm{H}_n\|^2 = \langle \mathrm{H}_n \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{H}_n^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle$. Or H_n est unitaire de degré n donc $\mathrm{H}_n^{(n)} = n!$. Comme $\mathrm{H}_0 = 1$,

$$\|\mathrm{H}_n\|^2 = n! \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = n!$$

puis $\|\mathrm{H}_n\| = \sqrt{n!}$.

8.d On trouve successivement $\mathrm{H}_1 = \mathrm{X}$, $\mathrm{H}_2 = \mathrm{X}^2 - 1$ et $\mathrm{H}_3 = \mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}$. En résolvant un système (triangulaire), on obtient $\mathrm{P} = 2\mathrm{H}_0 + 4\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3$. Comme $(\mathrm{H}_0,\mathrm{H}_1,\mathrm{H}_2,\mathrm{H}_3)$ est une base orthhormée de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, donc $4\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3 \in \mathrm{vect}(\mathrm{H}_0)^\perp = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]^\perp$. Le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]^\perp$ est donc $2\mathrm{H}_0$ et en notant d la distance recherchée, on obtient via le théorème de Pythagore :

$$d^2 = \|4\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \mathrm{H}_3\|^2 = 16\|\mathrm{H}_1\|^2 + \|\mathrm{H}_2\|^2 + \|\mathrm{H}_3\|^2 = 16\dot{1}! + 2! + 3! = 24$$

puis $d = \sqrt{24}$.

$\boxed{9}$ **9.a** Suposons $p < n$. Puisque $\deg \mathrm{S} = p$, $\mathrm{S}^{(n)} = 0$. D'après la question **8.a**,

$$\langle \mathrm{S} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \langle \mathrm{S}^{(n)} \mid \mathrm{H}_0\rangle = 0$$

9.b Notons m_i les multiplicités (impaires) des racines a_i. Notons également $b_1,\dots,b_q$ les racines de multiplicités paires de H_n ainsi que n_i les multiplictés des b_i. Notons enfin $\mathrm{Q}_1,\dots,\mathrm{Q}_r$ les polynômes irréductibles unitaires de degré 2 apparaissant dans la décomposition en facteurs irréductibles de H_n et p_i leurs «multiplicités». Comme H_n est unitaire, sa décomposition en facteurs irréductibles est :

$$\mathrm{H}_n = \prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X} - a_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{q}(\mathrm{X} - b_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Q}_i^{p_i}$$

Ainsi

$$\mathrm{SH}_n = \prod_{i=1}^{p}(\mathrm{X} - a_i)^{m_i+1} \prod_{i=1}^{q}(\mathrm{X} - b_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Q}_i^{p_i}$$

Les facteurs $(\mathrm{X} - a_i)^{m_i+1}$ sont positifs sur $\mathbb{R}$ puisque $m_i + 1$ est pair, de même que les facteurs $(\mathrm{X} - b_i)^{n_i}$. Ensuite les polynômes Q_i étant irréductibles de degré 2, ils sont aussi positifs sur $\mathbb{R}$. On en déduit que SH_n est positif sur $\mathbb{R}$.

9.c Supposons que $p < n$. Alors $x \mapsto \mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x)f(x)$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Puisque $\langle \mathrm{S} \mid \mathrm{H}_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x)f(x) = 0$, $x \mapsto \mathrm{S}(x)\mathrm{H}_n(x)f(x)$ est nulle sur $\mathbb{R}$. Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, le polynôme SH_n est nul sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est infini, $\mathrm{SH}_n = 0$. Ceci est impossible car ni S ni H_n ne sont nuls et $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est intègre. On en déduit que $p \geq n$.
Puisque $\deg \mathrm{H}_n = n$, on a également $p \leq n$ d'où $p = n$. Finalement, H_n possède eaxctement n racines rélles distinctes.