Devoir à la maison n°21

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

1 **1.a** L'application $\theta \mapsto \cos(x\sin\theta)$ est π-périodique donc

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(x\sin(\theta))\,d\theta$$

Par relation de Chasles,

$$2J(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \cos(x\sin(\theta))\,d\theta$$

puis

$$J(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \cos(x\sin(\theta))\,d\theta$$

L'application $\theta \mapsto \cos(x\sin\theta)$ est π-périodique est paire donc

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos(x\sin(\theta))\,d\theta$$

1.b Comme cos est paire, J est également paire. Posons $f : (x,\theta) \mapsto \cos(x\sin\theta)$.

- $\forall\theta\in[0,\pi]$, $x \mapsto \cos(x\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, les applications $\theta \mapsto f(x,\theta)$ et $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta) = -\sin(x\sin\theta)\sin\theta$ sont bornées donc intégrables sur le segment $[0,\pi]$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $\theta\in[0,\pi]$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\theta)\right| = \left|-\cos(x\sin\theta)\sin^2\theta\right| \leq 1$$

  et $\theta \mapsto 1$ est évidemment intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ (et a fortiori continue) sur $\mathbb{R}$.
On peut de plus préciser que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$J'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$
$$J''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\sin^2\theta\,d\theta$$

1.c Par inégalité triangulaire,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |J(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x\sin\theta)|\,d\theta \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta = 1$$

Donc J est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.d Comme $\sin'' = -\cos \leq 0$ sur $[0, \pi/2]$, sin est concave sur $[0, \pi/2]$. Le graphe de sin est donc compris entre sa corde reliant les points d'abscisse 0 et $\pi/2$ et la la tangente au point d'abscisse 0. On en déduit l'encadrement.
Soit $x \in]0, 2]$. Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$0 \leq \frac{2x\theta}{\pi} \leq x \sin\theta \leq x\theta \leq \pi$$

Comme cos est décroissante sur $[0, \pi]$, pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\cos(x\theta) \leq \cos(x\sin\theta) \leq \cos\left(\frac{2x\theta}{\pi}\right)$$

puis, par croissance de l'intégrale et en utilisant **1.a**,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\theta)\, d\theta \leq J(x) \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{2x\theta}{\pi}\right) d\theta$$

ou encore

$$\frac{2}{\pi x}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq J(x) \leq \frac{\sin x}{x}$$

1.e Il est clair que $J(0) = 1$. De plus, d'après la question **1.b**, $J'(0) = 0$.
Enfin, pour $x \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, \pi]$, $0 \leq x\sin\theta \leq x \leq \pi$. Comme sin est positive sur $[0, \pi]$, la question **1.b** montre que J' est négative sur $[0, \pi]$ donc J est décroissante sur $[0, \pi]$.

2 **2.a** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\sin^{2n+1}(\theta)\, d\theta \\ &= -\left[\cos(\theta)\sin^{2n+1}(\theta)\right]_0^{\pi/2} + (2n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(\theta)\sin^{2n}(\theta)\, d\theta \\ &= (2n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(\theta))\sin^{2n}(\theta)\, d\theta \\ &= (2n+1)(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

ou encore $(2n+1)I_n = 2(n+1)I_n$.

2.b Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, on montre par exemple le résultat par une récurrence sans difficulté.

3 **3.a** On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Le rayon de convergence est donc infini. Notamment, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}$$

3.b Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $f_n : \theta \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n}\sin^{2n}(\theta)}{(2n)!}$. Alors $\|f_n\|_{\infty,[0,\pi/2]} = \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$. La série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge puisque $\sum \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ est une série entière de rayon de convergence infini. Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur le segment $[0, \pi/2]$.
Par interversion série/intégrale

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(\theta)\, d\theta = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

4 On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta \\ J'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin\theta\, d\theta \\ J''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\sin^2\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{J}(x)+\mathrm{J}''(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Les fonctions $\theta\mapsto\sin(x\sin\theta)$ et $\theta\mapsto-\cos\theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, de dérivées respectives $\theta\mapsto x\cos\theta\cos(x\sin\theta)$ et $\theta\mapsto\sin\theta$ donc, par intégration par parties,

$$\mathrm{J}'(x)=\frac{1}{\pi}\left[\sin(x\sin\theta)\cos\theta\right]_0^\pi-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\theta)\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=-x(\mathrm{J}(x)+\mathrm{J}''(x))$$

$\boxed{5}$ Soit f une éventuelle solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Il existe donc une suite (a_n) telle que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

Alors

$$\begin{aligned}x(f(x)+f''(x))+f'(x)&=x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+a_1+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}\\&=a_1+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+(n+2)^2a_{n+2})x^{n+1}\end{aligned}$$

Comme $x(f(x)+f''(x))+f'(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, on obtient par unicité du développement en série entière $a_1=0$ et $a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Par récurrence, on montre alors que $a_{2n+1}=0$ et $a_{2n}=\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}a_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On en déduit que $f=a_0\mathrm{J}\in\mathrm{vect}(\mathrm{J})$.
Comme l'équation $xy''+y'+xy=0$ est linéaire homogène, toute fonction de vect(J) est également une solution déveop-pable en série entière sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ est donc vect(J) qui est bien de dimension 1.

$\boxed{6}$ Comme J et K sont de classe $\mathcal{C}^2$, W est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{W}'(x)=\mathrm{J}''(x)\mathrm{K}(x)-\mathrm{J}(x)\mathrm{K}''(x)=\left(-\mathrm{J}(x)-\frac{1}{x}\mathrm{J}'(x)\right)\mathrm{K}(x)-\mathrm{J}(x)\left(-\mathrm{K}(x)-\frac{1}{x}\mathrm{K}'(x)\right)=-\frac{1}{x}\mathrm{W}(x)$$

On en déduit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{W}(x)=\lambda\exp(-\ln(x))=\frac{\lambda}{x}$$

$\boxed{7}$ **7.a** Remarquons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{H}_{n+1}}{\mathrm{H}_n}=\frac{\mathrm{H}_n+\frac{1}{n+1}}{\mathrm{H}_n}=1+\frac{1}{(n+1)\mathrm{H}_n}$$

Or il est clair que $\mathrm{H}_n\geq1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1\leq\frac{\mathrm{H}_{n+1}}{\mathrm{H}_n}\leq1+\frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{H}_{n+1}}{\mathrm{H}_n}=1$.

7.b On applique la règle de d'Alembert. Posons $b_n=\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{H}_n}{4^n(n!)^2}$. Pour $x\neq0$, d'après la question précédente,

$$frac|b_{n+1}x^{2(n+1)}||b_nx^n|=\frac{\mathrm{H}_{n+1}}{4(n+1)^2\mathrm{H}_n}|x|^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0<1$$

La série entière $\sum b_nx^{2n}$ converge donc pour tout $x\in\mathbb{R}$: son rayon de convergence est donc infini.

En posant $a_{2n+1}=0$ et $a_{2n}=b_n$, on a $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En reprenant les calculs de la question **5**

$$x(\varphi(x)+\varphi''(x))+\varphi'(x)=a_1+\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+(n+2)^2a_{n+2})x^{n+1}\qquad=\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n+4(n+1)^2b_{n+1})x^{2n+1}$$

Or

$$b_n + 4(n+1)^2 b_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{H}_n}{4^n(n!)^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{H}_{n+1}}4^n(n!)^2 = \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2(n+1)}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(\varphi(x)+\varphi''(x))+\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2(n+1)}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n!(n+1)!}x^{2n+1}$$

Par ailleurs, par dérivation terme à terme d'une série entière

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2\mathrm{J}'(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n n}{4^n(n!)^2}x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}n!(n-1)!}x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n!(n+1)!}x^{2n+1}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(\varphi(x)+\varphi''(x))+f'(x) = -2\mathrm{J}'(x)$$

7.c Posons $\mathrm{L}(x) = \ln(x)\mathrm{J}(x)$ pour $x > 0$. Alors

$$\mathrm{L}'(x) = \frac{1}{x}\mathrm{J}(x) + \ln(x)\mathrm{J}'(x)$$
$$\mathrm{L}''(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{J}(x) + \frac{2}{x}\mathrm{J}'(x) + \ln(x)\mathrm{J}''(x)$$

On obtient alors

$$x(\mathrm{L}(x)+\mathrm{L}''(x))+\mathrm{L}'(x) = \ln(x)(x(\mathrm{J}(x)+\mathrm{J}''(x))+\mathrm{J}'(x)) + 2\mathrm{J}'(x) = 2\mathrm{J}'(x)$$

Avec la question précédente, on en déduit que

$$x(\mathrm{K}''(x)+\mathrm{K}(x))+\mathrm{K}'(x) = 0$$

Donc K est bien solution de $xy''+y'+xy=0$. Par ailleurs, un calcul donne

$$\mathrm{W}(x) = -\frac{1}{x}\mathrm{J}(x)^2 + \mathrm{J}'(x)\varphi(x) - \mathrm{J}(x)\varphi'(x)$$

On a vu à la question **6** qu'il existait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{W}(x) = \dfrac{\lambda}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\mathrm{J}(x^2) + x\left(\mathrm{J}'(x)\varphi(x) - \mathrm{J}(x)\varphi'(x)\right) = \lambda$$

Les fonctions J et φ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ donc elles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Notamment, J, J′, φ et φ' sont continues en 0. En passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient $\lambda = -\mathrm{J}(0)^2 = -1$. Par conséquent, $\mathrm{W}(x) = -\dfrac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Notamment, le wronskien W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui garantit que (J, K) est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $xy''+y'+xy=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

8 **8.a** Il s'agit d'une récurrence sans difficulté (utiliser une intégration par parties pour l'hérédité).

8.b Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $x \mapsto e^{-xy}\mathrm{J}(\sqrt{x})$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ car J l'est. De plus, J est bornée donc $e^{-xy}\mathrm{J}(\sqrt{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-xy})$. Comme l'application $x \mapsto e^{-xy}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ ($y>0$), $x \mapsto e^{-xy}\mathrm{J}(\sqrt{x})$ l'est aussi.
De plus, avec la question **3.b**,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^{-xy}\mathrm{J}(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}e^{-xy}x^n$$

Avec la question précédente,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4^n y^{n+1} n!} = \frac{1}{y}\cdot\frac{(1/4y)^n}{n!}$$

Or la série exponentielle $\sum \dfrac{(1/4y)^n}{n!}$ converge donc, d'après le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{J}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1/4y)^n}{n!} = \frac{1}{y}e^{-1/4y}$$

9 **9.a** A nouveau, J est bornée donc $e^{-xy}\mathrm{J}(\sqrt{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{-xy})$, ce qui justifie l'existence de $\mathrm{L}(y)$.

9.b On vérifie les hypothèses suivantes.

- Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto e^{-xy}\mathrm{J}(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $y \mapsto e^{-xy}\mathrm{J}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $a > 0$. Pour tout $y \in [a, +\infty[$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|e{-}xy\mathrm{J}(x)| \leq \|\mathrm{J}\|_\infty e^{-ax}$$

et $x \mapsto \|\mathrm{J}\|_\infty e^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, L est continue sur $\bigcup_{a>0}[a, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{y\to+\infty} e^{-xy}\mathrm{J}(x) = 0$. L'hypothèse de domination vérifiée précédemment permet alors d'appliquer le théorème de convergence dominée.

$$\lim_{y\to+\infty} \mathrm{L}(y) = \int_0^{+\infty} 0 \, \mathrm{d}x = 0$$

$\boxed{10}$ **10.a** On trouve classiquement

$$\forall u \in]-1, 1[, \ \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = (1+u^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} u^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2} u^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} u^{2n}$$

10.b Soit $y > 1$. D'après la question **3.b**,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ e^{-xy}\mathrm{J}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ g_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} e^{-xy} x^{2n}$$

Avec la question **8.a**,

$$\int_0^{+\infty} |g_n(x)| \, \mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{4^n y^{2n+1}(n!)^2} = \frac{1}{y} \cdot \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n y^{2n}}$$

En posant $u_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n y^{2n}}$,

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4y^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{y^2} < 1$$

de sorte que $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert. On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{J}(\sqrt{x}) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^n}{4^n y^{2n}}$$

D'après la question précédente, on a donc

$$\mathrm{L}(y) = \frac{1}{y} \cdot \sqrt{1 + (1/y)^2} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

$\boxed{11}$ **11.a** On rappelle qu'on à vu à la question**1.c** que $|\mathrm{J}(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{L}_n(y) - \mathrm{L}(y)| = \left| \int_n^{+\infty} \mathrm{J}(x) e^{-xy} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_n^{+\infty} |\mathrm{J}(x)| e^{-xy} \, \mathrm{d}x \leq \int_n^{+\infty} e^{-xy} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{-ny}}{y}$$

11.b Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\mathrm{L}_n(y) &= \frac{\pi}{2}\int_0^n e^{-xy}\mathrm{J}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^n \left(e^{-xy}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^n\left(\int_0^{\pi/2} e^{-xy}e^{ix\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^n e^{-xy}e^{ix\sin\theta}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\theta\right) \qquad \text{d'après Fubini} \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^n e^{x(-y+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\theta\right)
\end{aligned}$$

De plus, pour $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\int_0^n e^{x(-y+i\sin\theta)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{x(-y+i\sin\theta)}}{-y+i\sin\theta}\right]_{x=0}^{x=n} = \frac{e^{n(-y+i\sin\theta)}}{-y+i\sin\theta} + \frac{1}{y-i\sin\theta}$$

On en déduit le résultat voulu.

11.c Par inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^{\pi/2}\frac{e^{n(-y+i\sin\theta)}}{-y+i\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \le \int_0^{\pi/2}\left|\frac{e^{n(-y+i\sin\theta)}}{-y+i\sin\theta}\right|\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{e^{-ny}}{\sqrt{y^2+\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \le \int_0^{\pi/2}\frac{e^{-ny}}{y}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-ny}}{y}$$

11.d Le théorème des gendarmes et la question précédente montrent que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{e^{n(-y+i\sin\theta)}}{-y+i\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$

On en déduit avec la question **11.b** que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}\mathrm{L}_n(y) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{y-i\sin\theta}\right)$$

Mais la question **11.a** montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{L}_n(y) = \mathrm{L}(y)$$

Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(y) &= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{y-i\sin\theta}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{y+i\sin\theta}{y^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{2y}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{y^2+\sin^2\theta}
\end{aligned}$$

L'application tan réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$. De plus, avec $u = \tan\theta$, $\mathrm{d}u = (1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ i.e. $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Enfin, $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2}$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{y^2+\sin^2\theta} &= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{y^2(1+u^2)+u^2} \\
&= \frac{1}{1+y^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{y^2}{1+y^2}} \\
&= \frac{1}{1+y^2}\left[\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\arctan\left(\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}u\right)\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $L(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.