Devoir à la maison n°22

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Problème 1

Remarquons que dans la définition d'un noyau reproduisant la troisième condition entraîne automatiquement la seconde. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathrm{V}_x(f)| = |f(x)| = |\langle k_x, f\rangle| \leq \|k_x\|\|f\|$$

et la forme linéaire V_x est alors continue par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

1 Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. Alors pour tout $y \in \mathrm{F}$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = 0$$

car $x \in \mathrm{F}^\perp$ et $u(y) \in u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. Ainsi $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$: $\mathrm{F}^\perp$ est donc stable par u.

2 Par bilinéarité du produit scalire et linéarité de u, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \cos^2(t)\langle u(x_0), x_0\rangle + \sin^2(t)\langle u(y), y\rangle + \sin(t)\cos(t)\left(\langle u(x_0), y\rangle + \langle x_0, u(y)\rangle\right)$$

Comme cos et sin sont de classe $\mathcal{C}^1$, φ l'est également par opérations.

3 Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\|\gamma(t)\|^2 = \cos^2 t\|x_0\|^2 + 2\cos t\sin t\langle x_0, y\rangle + \sin^2 t\|y\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

car $\|x_0\| = \|y\| = 1$ et $x_0 \perp y$. Ainsi $\|\gamma(t)\| = 1$.
Remarquons que $\gamma(0) = x_0$ et que γ est à valeurs dans $\{x \in \mathrm{F},\ \|x\| = 1\}$. Par définition de u_0, $\varphi(t) \leq \varphi(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi φ admet un maximum en 0 de sorte que $\varphi'(0) = 0$.

4 D'après la question **2**,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = -2\cos(t)\sin(t)\langle u(x_0), x_0\rangle + 2\sin(t)\cos(t)\langle u(y), y\rangle + \cos(2t)\left(\langle u(x_0), y\rangle + \langle x_0, u(y)\rangle\right)$$

Notamment, $\varphi'(0) = \langle u(x_0), y\rangle + \langle x_0, u(y)\rangle = 2\langle u(x_0), y\rangle$. Or $\varphi'(0) = 0$ donc $u(x_0) \perp y$.

5 Par bilinéarité du produit scalaire, on peut en fait montrer que pour tout vecteur $y \in \mathrm{F}$ (pas nécessairement unitaire) orthogonal à x_0, $u(x_0)$ est également orthogonal à y. Mais comme u est auto-adjoint ceci équivaut $x_0 \perp u(y)$.
Comme F est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_F de F induit par u. Ce qui précède montre que $\mathrm{vect}(x_0)^\perp$ (orthogonal dans F) est stable par u_F. Mais comme u_F est encore auto-adjoint, $(\mathrm{vect}(x_0)^\perp)^\perp$ (orthogonal dans F à nouveau) est encore stable par u_F. Comme $\mathrm{vect}(x_0)$ est de dimension finie, $(\mathrm{vect}(x_0)^\perp)^\perp = \mathrm{vect}(x_0)$. Ainsi $\mathrm{vect}(x_0)$ est stable par u_F. x_0 est donc un vecteur propre de u_F et donc de u.

6 La courbe de k_s est composée du segment de droite reliant le point $(0,0)$ au point $(s, s(1-s))$ et du segment de droite reliant le point $(s, s(1-s))$ au point $(1,0)$.

7 Remarquons que $\mathrm{K}(s,t) = \min(s,t)(1-\max(s,t))$. Or pout tout $(t,s) \in [0,1]^2$,

$$\min(s,t) = \frac{s+t-|s-t|}{2}$$
$$\max(s,t) = \frac{s+t+|s-t|}{2}$$

Ainsi par continuité de la valeur absolue, $(s,t) \mapsto \min(s,t)$ et $(s,t) \mapsto \max(s,t)$ sont continues sur $[0,1]^2$ puis K également.

8 T est clairement linéaire. Soit $f \in \mathrm{E}$. Via la relation de Chasles,

$$\forall s \in [0,1],\ \mathrm{T}(f)(s) = (1-s)\int_0^s tf(t)\ \mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $\mathrm{T}(f)$ est continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[0,1]$. Ainsi T est bien à valeurs dans E. Finalement, T est bien un endomorphisme de E.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall s \in [0,1],\ |\mathrm{T}(f)(s)| \leq \|k_s\|\|f\|$$

Comme K est continue sur le compact $[0,1]^2$, il existe M tel que $|\mathrm{K}(s,t)| \leq \mathrm{M}$ pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$. Ainsi

$$\|k_s\|^2 = \int_0^1 k_s(t)^2\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{K}(s,t)^2\ \mathrm{d}t \leq \mathrm{M}^2$$

puis $\|k_s\| \leq \mathrm{M}$. Ainsi

$$\forall s \in [0,1],\ |\mathrm{T}(f)(s)| \leq \mathrm{M}\|f\|$$

puis

$$\|\mathrm{T}(f)\|^2 = \int_0^1 \mathrm{T}(f)(s)^2\ \mathrm{d}t \leq \mathrm{M}^2\|f\|^2$$

puis $\|\mathrm{T}(f)\| \leq \mathrm{M}\|f\|$. L'endomorphisme T est donc continu par caractérisation de la continuité pour les applications linéaires.

9 Soit $k \in \mathbb{N}$. En exploitant à nouveau la relation de Chasles

$$\begin{aligned}\forall s \in [0,1],\ \mathrm{T}(p_k)(s) &= (1-s)\int_0^s tp_k(t)\ \mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)p_k(t)\ \mathrm{d}t \\ &= (1-s)\int_0^s t^{k+1}\ \mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)t^k\ \mathrm{d}t \\ &= (1-s)\frac{s^{k+2}}{k+2} + s\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} - \frac{s^{k+1}}{k+1} + \frac{s^{k+2}}{k+2}\right) \\ &= \frac{s^{k+2}}{k+2} - \frac{s^{k+3}}{k+2} + \frac{s}{k+1} - \frac{s}{k+2} - \frac{s^{k+2}}{k+1} + \frac{s^{k+3}}{k+2} \\ &= -\frac{s^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \frac{s}{(k+1)(k+2)} \\ &= -\frac{1}{(k+1)(k+2)}p_{k+2}(s) + \frac{1}{(k+1)(k+2)}p_1(s)\end{aligned}$$

Finalement, $\mathrm{T}(p_k) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}p_{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}p_1 \in \mathrm{F}$. Comme $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de F, F est stable par l'endomorphisme T.

10 Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{T}(p_k)'' = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}p''_{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}p''_1 = -p_k$$

Par linéarité de T et de la dérivation et comme $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de F, $\mathrm{T}(p)'' = -p$ pour tout $p \in \mathrm{F}$.

11 k_0 et k_1 sont clairement nulles sur $[0,1]$. On en déduit que $\mathrm{T}(f)(0) = \mathrm{T}(f)(1) = 0$.

12 Soit $f \in \mathrm{E}$. On rappelle que

$$\forall s \in [0,1],\ \mathrm{T}(f)(s) = (1-s)\int_0^s tf(t)\ \mathrm{d}t + s\int_s^1 (1-t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

Le théorème fondamental de l'analyse garantit que $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall s \in [0,1],\ \mathrm{T}(f)'(s) = -\int_0^s tf(t)\ \mathrm{d}t + (1-s)sf(s) + \int_s^1 (1-t)f(t)\ \mathrm{d}t - s(1-s)f(s) = -\int_0^s tf(t)\ \mathrm{d}t + \int_s^1 (1-t)f(t)\ \mathrm{d}t$$

Le théorème fondamental de l'analyse garantit à nouveau que $\mathrm{T}(f)'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que

$$\forall s \in [0,1],\ \mathrm{T}(f)''(s) = -sf(s) - (1-s)f(s) = -f(s)$$

Ainsi $\mathrm{T}(f)'' = -f$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. Alors $T(f) = 0_E$ puis $f = -T(f)'' = 0_E$. Ainsi $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ et T est injectif.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Notons G le sous-espace vectoriel de E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en 0 et 1. D'après les questions **11** et **12**, $\operatorname{Im} T \subset G$. Réciproquement, soit $g \in G$. La question **12** montre que le seul antécédent de g ne peut être que $-g''$. Vérifions-le. Posons $h = T(-g'') - g$. Toujours d'après la question **12**, h est de classe $\mathcal{C}^2$ et $h'' = T(-g'')'' - g'' = g'' - g'' = 0_E$. Ainsi h est affine. Mais comme $h(0) = h(1) = 0$, h est nulle i.e. $g = T(-g'') \in \operatorname{Im} T$.
Par double inclusion, $\operatorname{Im} T = G$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ On a $T(f) = \lambda f$. Comme $\lambda \neq 0$, $f = \frac{1}{\lambda}T(f)$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$. On peut alors affirmer que $T(f)'' = \lambda f''$ i.e. $\lambda f'' = -f$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Comme $\operatorname{Ker} T = \{0_E\}$, 0 n'est pas valeur propre de T. Soit alors une valeur propre non nulle de T. Alors il existe $f \in E$ non nulle telle que $f'' + \frac{1}{\lambda}f = 0$ d'après la question précédente.
Supposons $\lambda < 0$. Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = A\operatorname{ch}(x/\sqrt{-\lambda}) + B\operatorname{sh}(x/\sqrt{-la})$ pour $x \in [0,1]$. Comme $f(0) = \frac{1}{\lambda}T(f)(0) = 0$, $A = 0$. Pour la même raison, $f(1) = 0$ donc $B = 0$. Ceci est impossible puisque f n'est pas nulle en tant que vecteur propre.
Supposons $\lambda > 0$. Il existe alors $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = A\cos(x/\sqrt{\lambda}) + B\sin(x/\sqrt{la})$ pour $x \in [0,1]$. Comme $f(0) = \frac{1}{\lambda}T(f)(0) = 0$, $A = 0$. Comme f n'est pas nulle, $B \neq 0$. Mais $f(1) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = k\pi$ i.e. $\lambda = \frac{1}{k^2\pi^2}$.
Posons $\lambda_k = \frac{1}{k^2\pi^2}$. Montrons que λ_k est effectivement valeur propre de T et déterminons son sous-espace propre associé E_k. Ce qui précède montre déjà que $E_k \subset \operatorname{vect}(f_k)$ avec $f_k : t \mapsto \sin(k\pi t)$. Il suffit donc maintenant de prouver que $T(f_k) = \lambda_k f_k$ pour affirmer que λ_k est effectivement valeur propre de T et que $E_k = \operatorname{vect}(f_k)$. On sait que $T(f_k)'' = -f_k = \lambda_k f_k''$ donc $T(f_k) - \lambda_k f_k$ est affine. Comme cette fonction s'annule en 0 et 1, elle est nulle i.e. $T(f_k) = \lambda_k f_k$.
Pour conclure, $\operatorname{Sp}(T) = \left\{\frac{1}{k^2\pi^2},\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{1}{k^2\pi^2}$ est la droite engendré par $t \mapsto \sin(k\pi t)$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Soit $(f, g) \in E^2$. Alors

$$\langle T(f), g\rangle = \int_0^1 T(f)(t)g(t)\,dt$$

D'après la question **12**, $T(f)$ et $-T(g)'$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivées respectives $T(f)'$ et g. Ainsi par intégration par parties

$$\langle T(f), g\rangle = -\left[T(f)(t)T(g)'(t)\right]_0^1 + \int_0^1 T(f)'(t)T(g)'(t)\,dt$$

Or $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$ donc

$$\langle T(f), g\rangle = \int_0^1 T(f)'(t)T(g)'(t)\,dt$$

Mais $T(f)'$ et $T(g)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivées respectives $-f$ et $T(g)'$ donc par intégration par parties

$$\langle T(f), g\rangle = -\left[T(f)'(t)T(g)(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f(t)T(g)(t)\,dt$$

A nouveau, $T(g)(0) = T(g)(1) = 0$ donc

$$\langle T(f), g\rangle = \int_0^1 f(t)T(g)(t)\,dt = \langle f, T(g)\rangle$$

$\boxed{\mathbf{18}}$ Supposons $H \neq \{0_E\}$. D'après le résultat admis par l'énoncé, il existe $f \in H$ telle que $\|f\| = 1$ et $\langle T(f), f\rangle = \sup_{h\in H, \|h\|=1} \langle T(h), h\rangle$. Il est clair que G est stable par T puisque tous les g_k sont des vecteurs propres de T. Mais alors $H = G^\perp$ est également stable par T d'après la question **1**. D'après la question **5**, f est alors un vecteur propre de T. On en déduit que $f \in G$. Ainsi $f \in G \cap G^\perp = \{0_E\}$, ce qui est absurde car f est unitaire. On en déduit que $H = \{0_E\}$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ Soit $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors

$$\langle g_k, g_\ell\rangle = 2\int_0^1 \sin(k\pi t)\sin(\ell\pi t)\,dt = \int_0^1 (\cos((k-\ell)\pi t) - \cos((k+\ell)\pi t))\,dt$$

Si $k = \ell$,

$$\langle g_k, g_\ell \rangle = 1 - \frac{1}{k+\ell}\left[\sin((k+\ell)\pi t)\right]_0^1 = 1$$

Si $k \neq \ell$,

$$\langle g_k, g_\ell \rangle = \frac{1}{k-\ell}\left[\sin((k-\ell)\pi t)\right]_0^1 - \frac{1}{k+\ell}\left[\sin((k+\ell)\pi t)\right]_0^1 = 0$$

Par conséquent, $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bien une famille orthonormale.

20 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\|\frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k\right\|_\infty = \frac{|\langle f, g_k\rangle|}{k^2\pi^2}\|g_k\|_\infty$$

Or $\|g_k\|_\infty = \sqrt{2}$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle f, g_k\rangle| \leq \|f\|\|g_k\| = \|f\|$ puisque les g_k sont unitaires. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\left\|\frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k\right\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}\|f\|}{k^2\pi^2}$$

La série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k$ converge donc normalement sur $[0,1]$. Comme les g_k sont continues, la somme Φ de cette série est donc également continue sur $[0,1]$.

21 Comme les g_k sont des vecteurs propres de T associés aux valeurs propres $\frac{1}{k^2\pi^2}$,

$$\mathrm{T}(f_\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\langle f, g_k\rangle \mathrm{T}(g_k) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k$$

On a prouvé la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k$ vers Φ à la question précédente. Ceci signifie que $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\|\mathrm{T}(f_\mathrm{N}) - \Phi\|_\infty = 0$.
Or pour tout $h \in \mathrm{E}$,

$$\|h\|^2 = \int_0^1 h(t)^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|h\|_\infty^2 \,\mathrm{d}t = \|h\|_\infty^2$$

Remarque. h est bien bornée car continue sur le segment $[0,1]$.

Ainsi $\|h\| \leq \|h\|_\infty$. On en déduit donc que $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\|\mathrm{T}(f_\mathrm{N}) - \Phi\| = 0$.

22 La question précédente montre que la suite $(\mathrm{T}(f_\mathrm{N}))_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge vers Φ pour la norme $\|\cdot\|$. Mais comme la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale totale, la suite $(f_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$. Mais comme T est un endomorphisme continu pour la norme $\|\cdot\|$, la suite $(\mathrm{T}(f_\mathrm{N}))_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ converge alors vers $\mathrm{T}(f)$ pour la norme $\|\cdot\|$. Par unicité de la limite, $\mathrm{T}(f) = \Phi$.

23 La définition de $(\cdot \mid \cdot)$ est problématique puisqu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ n'est pas toujours dérivable sur $[0,1]$. Néanmoins la dérivée d'une telle fonction n'est pas défini qu'en un nombre fini de points. On peut alors la prolonger arbitrairement en ces points. L'intégrale de cette dérivée prolongée ne dépend pas alors du prolongement choisi. Le raisonnement est encore valable pour un produit de deux dérivées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$, ce qui légitime la définition de $(\cdot \mid \cdot)$.
L'application $(\cdot \mid \cdot)$ est alors clairement symétrique, bilinéaire et positive. Soit $f \in \mathrm{E}_1$ telle que $(f \mid f) = 0$. Notons $(x_i)_{0\leq i\leq p}$ une subdivision adaptée à f comme dans la définition. On a donc par la relation de Chasles :

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

et, comme les termes de cette somme sont tous positifs,

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

Par définition, la restriction de f à $]x - i - 1, x_i[$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}_i$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$. Alors $\tilde{f}_i'$ est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $\int_{x_{i-1}}^{x_i}\tilde{f}_i'(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$. Comme $(\tilde{f}_i')^2$ est continue et positive sur $[x_{i-1}, x_i]$, elle est nulle sur $[x_{i-1}, x_i]$. On en déduit que f' est nulle sur $]x_{i-1}, x_i[$. Ainsi f est constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$. Mais f est continue sur $[0,1]$ par hypothèse donc elle est constante sur $[0,1]$. Puisque $f(0) = f(1) = 0$, f est nulle sur $[0,1]$.

24 Soit $x \in [0,1]$. Puisque $f(0) = 0$,

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x 1 \cdot f'(t)\ \mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire $(f,g) \in\mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$,

$$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^x 1^2\ \mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^x f'(t)^2\ \mathrm{d}t} = \sqrt{x\int_0^x f'(t)^2\ \mathrm{d}t}$$

25 Soit $s \in [0,1]$. Pour tout $t \in [0,s[$, $k_s'(t) = 1-s$ et pour tout $t \in]s,1]$, $k_s'(t) = s$. Ainsi k_s admet des prolongements de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,s]$ et $[s,1]$.

$$\mathrm{U}(f)(s) = \int_0^s k_s'(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + \int_s^1 k_s'(t)\ \mathrm{d}t$$

Par intégration par parties, on obtient d'une part,

$$\int_0^s k_s'(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = [k_s(t)f'(t)]_0^s - \int_0^s k_s(t)f''(t) = s(1-s)f'(s) - \int_0^s k_s(t)f''(t)\ \mathrm{d}t$$

et d'autre part

$$\int_s^1 k_s'(t)f'(t)\ \mathrm{d}t = [k_s(t)f'(t)]_s^1 - \int_s^1 k_s(t)f''(t) = -s(1-s)f'(s) - \int_s^1 k_s(t)f''(t)\ \mathrm{d}t$$

Ainsi

$$\mathrm{U}(f)(s) = -\int_0^1 k_s(t)f''(t)\ \mathrm{d}t = -\mathrm{T}(f'')(s)$$

Par conséquent, $\mathrm{U}(f) = -\mathrm{T}(f'')$.
D'après la question **12**, $(\mathrm{T}(f'')'' + f)'' = 0$ donc $\mathrm{T}(f'') + f$ est affine. Mais $\mathrm{T}(f)'' + f$ s'annule en 0 et 1 en utilisant **12** et car $f \in \mathrm{E}_1$. Ainsi $\mathrm{T}(f'') + f$ est nulle i.e. $\mathrm{U}(f) = f$.

26 Soit $s \in [0,1]$. A nouveau,

$$\mathrm{U}(f)(s) = \int_0^s k_s'(t)f'(t)\ \mathrm{d}t + \int_s^1 k_s'(t)\ \mathrm{d}t = (1-s)\int_0^s f'(t)\ \mathrm{d}t + s\int_s^1 f'(t)\ \mathrm{d}t = (1-s)(f(s)-f(0)) + s(f(1)-f(s)) = f(s)$$

car $f(0) = f(1) = 0$.

Il faut néanmoins montrer que pour une fonction f continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un segment $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t = f(b) - f(a)$. On utilise une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq p}$ de $[a,b]$. Quitte à considérer le prolongement $\tilde{f}_i$ de f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}_i'(t)\ \mathrm{d}t = \tilde{f}_i(x_i) - \tilde{f}_i(x_{i-1})$$

Mais comme f est continue $\tilde{f}_i(x_i) - \tilde{f}_i(x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})$. On conclut par la relation de Chasles que

$$\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p f(x_i) - f(x_{i-1}) = f(b) - f(a)$$

27 E_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$. De plus,

$$\forall f \in \mathrm{E}_1,\ (f \mid k_s) = \mathrm{U}(f)(s) = f(s)$$

D'après notre remarque liminaire, $(\mathrm{E}_1, (\cdot \mid \cdot))$ est bien un espace à noyau reproduisant de noyau K.

28 Supposons que $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ soit un espace à noyau reproduisant. Alors pour tout $x \in [0,1]$, V_x serait continue pour la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Considérons à nouveau les applications $p_k : x \mapsto x^k$. Alors $\|p_k\|^2 = \displaystyle\int_0^1 t^{2k}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1}$. Mais alors

$$\frac{|\mathrm{V}_1(p_k)|}{\|p_k\|} = \sqrt{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ainsi la forme linéaire V_1 ne peut être continue.

29 Comme la série $\sum a_n^2$ converge la suite (a_n^2) converge vers 0. La suite (a_n) converge alors également vers 0. Notamment (a_n) est bornée et le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.

30 Montrons déjà que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{]-1,1[}$. E_2 contient clairement la fonction nulle. Soit $(f,g) \in E_2^2$. Il existe donc deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et telles que pour tout $t \in]-1,1[$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \qquad \text{et} \qquad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

Soit également $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$(\lambda a_n + \mu b_n)^2 = \lambda^2 a_n^2 + \mu^2 b_n^2 + 2\lambda\mu a_n b_n$$

Puisque $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$, la série $\sum a_n b_n$ converge (absolument). On en déduit que $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)^2$ convergent comme combinaison linéaire de séries convergentes. On en déduit que $\lambda f + \mu g \in E_2$. Ceci prouve bien que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{]}-1,1[$ et donc que c'est un espace vectoriel réel.

L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement symétrique, bilinéaire et positive. Si $\langle f,f\rangle = 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = 0$ et donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis f est nulle sur $]-1,1[$. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc bien un produit scalaire sur E_2.

31 Posons $g_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^n = \frac{1}{1-xt}$. On a bien $g_x \in E_2$ puisque $\sum(x^n)^2$ converge comme série géométrique de raison $x^2 \in [0,1[$.

Soit $f \in E_2$, il existe donc $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n^2$ converge et $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ pour tout $t \in]-1,1[$. Alors

$$\langle g_x, f\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$$

32 D'après notre remarque liminaire, $(E_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est donc bien un espace à noyau reproduisant de noyau $K(x,y) \mapsto \frac{1}{1-xy}$.

33 On vérifie aisément que $(E_3, (\cdot \mid \cdot))$ est bien un espace préhilbertien réel. Posons $K(x,y) = k_x(y) = \min(x,y)$ pour $(x,y) \in [0,a]^2$. Soit $x \in [0,a]$. Alors $k_x'(t) = 1$ pour $t \in [0,x[$ et $k_x'(t) = 0$ pour $t \in]x,a]$. Ainsi pour $f \in E_3$,

$$(k_x \mid f) = \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x)$$

quitte à raisonner comme dans la question **26**. D'après notre remarque liminaire, $(E_3, (\cdot \mid \cdot))$ est bien un espace à noyau repoduisant de noyau K.

34 Posons pour $(f,g) \in E_4$, $\langle f,g\rangle = -\int_0^a \frac{f'(t)g'(t)}{\varphi'(t)}\,dt$. On vérifie que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire sur E_4 comme dans la question **23**. Posons $K(x,y) = k_x(y) = \min(\varphi(x),\varphi(y))$ pour $(x,y) \in [0,a]^2$. Comme φ est strictement décroissante,

$$k_x(y) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \geq y \\ \varphi(y) & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

Notamment $k_x'(t) = 0$ pour $t \in [0,a[$ et $K_x'(t) = \varphi'(t)$ pour $t \in]x,a]$. Ainsi

$$\langle k_x, f\rangle = -\int_x^a f'(t)\,dt = f(x) - f(a) = f(x)$$

quitte à raisonner comme dans la question **26**. D'après notre remarque liminaire, $(E_4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est bien un espace à noyau repoduisant de noyau K.

35 Si k_x est nulle, alors $N(V_x) = 0 = \|k_x\|$.

Sinon, en posant $g = \frac{k_x}{\|k_x\|}$, g est unitaire de sorte que

$$g(x) = \frac{k_x(x)}{\|k_x\|} = \frac{\langle k_x, k_x\rangle}{\|k_x\|} = \|k_x\|$$

Donc $\mathrm{N}(\mathrm{V}_x) \geq \|k_x\|$. De plus, pour tout $f \in \mathrm{E}$ unitaire et pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$|f(x)| = |\langle k_x, f\rangle| \leq \|k_x\|\|f\| = \|k_x\|$$

Ainsi $\mathrm{N}(\mathrm{V}_x) \leq \|k_x\|$. Finalement, $\mathrm{N}(\mathrm{V}_x) = \|k_x\|$.

36 Soient $f \in \mathrm{E}$ et $(x, y) \in \mathrm{I}^2$. Alors, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x) - f(y)| = |\langle k_x - k_y, f\rangle| \leq \|k_x - k_y\|\|f\|$$

Mais par identité remarquable

$$\|k_x - k_y\|^2 = \|k_x\|^2 + \|k_y\|^2 - 2\langle k_x, k_y\rangle = \mathrm{K}(x, x) + \mathrm{K}(y, y) - 2\mathrm{K}(x, y)$$

Par continuité de K,

$$\lim_{y\to x} \|k_x - k_y\|^2 = \mathrm{K}(x, x) + \mathrm{K}(x, x) - 2\mathrm{K}(x, x) = 0$$

donc

$$\lim_{y\to x} \|k_x - k_y\| = 0$$

puis

$$\lim_{y\to x} |f(x) - f(y)| = 0$$

et enfin, $\lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$ ce qui prouve que f est continue sur I.

37 L'application T est bien linéaire. On vérifie qu'elle est bien à valeurs dans E même si l'énoncé semble le supposer. Il s'agit du théorème de continuité des intégrales à paramètre. On se permet de vérifier uniquement l'hypothèse de domination. Soit $f \in \mathrm{E}$. Comme A est continue sur le compact $[0, 1]^2$, elle y est bornée. Alors

$$\forall (x, t) \in [0, 1]^2,\ |\mathrm{A}(x, t)f(t)| \leq \|\mathrm{A}\|_\infty |f(t)|$$

et la fonction continue $t \mapsto \|\mathrm{A}\|_\infty |f(t)|$ est évidement intégrable sur le segment $[0, 1]$. Ainsi $\mathrm{T}(f)$ est bien continue sur $[0, 1]$.
Comme $\operatorname{Ker}\mathrm{T}$ est de dimension finie, $(\operatorname{Ker}\mathrm{T})^\perp$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\mathrm{T}$ dans E. On sait alors que T induit un isomorphisme de $(\operatorname{Ker}\mathrm{T})^\perp$ sur $\operatorname{Im}\mathrm{T}$.

38 Posons $k_x :\ y \in [0, 1] \mapsto \mathrm{K}(x, y)$ et $\ell_x :\ t \mapsto \mathrm{A}(x, t)$ pour $x \in [0, 1]$ et vérifions que $\ell_x = \mathrm{S}(k_x)$. Il s'agit donc de vérifier que $\ell_x \in (\operatorname{Ker}\mathrm{T})^\perp$ et $\mathrm{T}(\ell_x) = k_x$. Soit $f \in \operatorname{Ker}\mathrm{T}$. Alors

$$\langle \ell_x, f\rangle = \int_0^1 \ell_x(t)f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{A}(x, t)f(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{T}(f)(x) = 0$$

car $f \in \operatorname{Ker}\mathrm{T}$. Ainsi $\ell_x \in (\operatorname{Ker}\mathrm{T})^\perp$. De plus,

$$\forall y \in [0, 1],\ \mathrm{T}(\ell_x)(y) = \int_0^1 \mathrm{A}(y, t)\ell_x(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{A}(y, t)\mathrm{A}(x, t) = \mathrm{K}(x, y) = k_x(y)$$

donc $\mathrm{T}(\ell_x) = k_x$ puis $\mathrm{S}(k_x) = \ell_x$ puisque $\ell_x \in (\operatorname{Ker}\mathrm{T})^\perp$.
Soit alors $f \in \operatorname{Im}\mathrm{T}$. Il existe donc $g \in (\operatorname{Ker}\mathrm{T})^\perp$ tel que $f = \mathrm{T}(g)$ ou encore $g = \mathrm{S}(f)$. Pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\varphi(k_x, f) = \langle \mathrm{S}(k_x), \mathrm{S}(f)\rangle = \langle \ell_x, g\rangle = \int_0^1 \mathrm{A}(x, t)g(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{T}(g)(x) = f(x)$$

D'après notre remarque liminaire, $(\operatorname{Im}\mathrm{T}, \varphi)$ est donc bien un espace à noyau reproduisant de noyau K.