Devoir à la maison n°23

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Solution 1

1. **a.** Posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $t \mapsto f(x,t)$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la convergence de l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ équivaut à l'intégrabilité de cette fonction. De plus,

$$f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $1-x<1$ i.e. $x>0$. Par ailleurs, $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc $t\mapsto f(x,t)$ est integrale en $+\infty$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Donc le domaine de definition de Γ est $\Delta = \mathbb{R}_+^*$.

b. Par intégration par parties avec, on obtient sous réserve de convergence :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, \mathrm{d}t = -\left[t^x e^{-t}\right]_{t\to 0^+}^{t\to+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

Or $\lim\limits_{t\to 0^+} t^x e^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$ donc $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x)>0$ en tant qu'intégrale d'une fonction positive, continue et non constamment nulle. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^n \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\pi}\prod_{k=1}^n\left(k-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\prod_{k=1}^n(2k-1) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n 2k} \\
&= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}
\end{aligned}$$

2. **a.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors $f_n : t \mapsto t^{2n}e^{-t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par croissances comparées, $u^n e^{-u} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u}\right)$ donc, en effectuant le changement de variable $u=t^2$, $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi f_n est intégrable en $+\infty$ et l'intégrale définissant I_n converge.

b. Effectuons le changement de variable $u=t^2$ i.e. $t=\sqrt{u}$. Notamment, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$. Alors

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{u^n e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{n-1/2}e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!}$$

3. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

b. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Posons $f(t) = \cos(xt)e^{-t^2}$ ainsi que $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}t^{2n}e^{-t^2}$.

(H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question **2.a**.

(H3) D'après la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+$.

(H4) f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{I}_n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^{2n}\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(x^2/4)^n}{n!}$$

Ainsi $\sum u_n$ converge en tant que série exponentielle.

Par théorème d'intégration terme à terme,

$$\mathrm{H}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(-1)^n (x^2/4)^n}{n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$$

4. **a.** On pose $g(x,t) = \cos(xt)e^{-t^2}$.

(H1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et $|g(x,t)| \leq e^{-t^2}$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(H2) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Alors $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(H3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\sin(xt)e^{-t^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

(H4) Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq te^{-t^2}$$

et $t \mapsto te^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et que $te^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On en déduit que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{H}'(x) = \int_0^{+\infty} -t\sin(xt)e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Par intégration par parties, on obtient sous réserve de convergence :

$$\mathrm{H}'(x) = \frac{1}{2}\left[\sin(xt)e^{-t^2}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\cos(xt)e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Le crochet est clairement nul de sorte que $\mathrm{H}'(x) = -\frac{x}{2}\mathrm{H}(x)$.

c. Comme une primitive de $x \mapsto -x/2$ est $x \mapsto -x^2/4$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(0)e^{-x^2}4$$

Or $\mathrm{H}(0) = \mathrm{I}_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{H}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x^2/4}$$