Devoir à la maison n°23

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement récrite.

Exercice 1 ★★ **E3A 2022 MP**

1. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

b. Démontrer que pour tout réel x de Δ, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

c. On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Calculer $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$.

a. Justifier l'existence de I_n.

b. En utilisant la question **1**, calculer I_n.

3. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$.

a. Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

b. Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.
On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.b** par une autre méthode.

a. Démontrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

c. Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.b**.