

# DEVOIR À LA MAISON N°25

- Le devoir devra être rédigé sur des copies *doubles*.
- Les copies ne devront comporter ni rature, ni renvoi, ni trace d'effaceur.
- Toute copie ne satisfaisant pas à ces exigences devra être intégralement réécrite.

## Problème 1

- 1 Il est évident que  $\Delta(X^k) = kX^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
- 2 Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Alors  $\Delta(P) = XP'$  donc  $\Delta^2(P) = X\Delta(P)' = X(P' + XP'') = \Delta(P) + XP''$ . Ainsi
- $$XP'' = \Delta^2(P) - \Delta(P) = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P)$$
- 3 Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\Delta(X^k) = kX^k \in \mathbb{R}_n[X]$ . Comme  $\Delta$  est linéaire et que  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ .
- 4 Puisque  $\Delta(X^k) = kX^k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la matrice de  $\Delta$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $D_n = \text{diag}(0, 1, 2, \dots, n)$ .
- 5 D'après la question 2,

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P) + a\Delta(P) = \Delta^2(P) + (a-1)\Delta(P)$$

Ainsi  $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ . Comme  $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre,  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$ .

- 6 Evident.
- 7 Comme  $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$ , la matrice de  $\Phi_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $D_n^2 + (a-1)D_n$  où  $D_n$  est la matrice de  $\Delta_n$  dans cette même base canonique. Comme  $D_n$  est diagonale, il en est de même de  $D_n^2 + (a-1)D_n$ . Ainsi  $\Phi_n$  est diagonalisable.
- 8 Evident. On trouve  $\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + b \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ .
- 9 On rappelle que la matrice  $D_n$  de  $\Delta_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $\text{diag}((k)_{0 \leq k \leq n})$ . On en déduit que la matrice de  $\varphi_n$  dans cette base est  $\text{diag}((k^2 + (a-1)k + b)_{0 \leq k \leq n})$ .

$$s^2 + (a-1)s + b = 0 \tag{1}$$

- 10 Si l'équation (1) admet deux racines entières distinctes,  $P = X^2 + (a-1)X + b = (X - m_1)(X - m_2)$  avec  $(X - m_1) \wedge (X - m_2) = 1$ . D'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker } \varphi_n = \text{Ker } P(\Delta_n) = \text{Ker}(\Delta_n - m_1 \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) \oplus \text{Ker}(\Delta_n - m_2 \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$$

Comme la matrice de  $\Delta_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est  $D_n = \text{diag}(0, 1, \dots, n)$ ,  $\text{Ker}(\Delta_n - m \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \text{vect}(X^m)$  pour tout  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On en déduit que  $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$ .

- 11 Si l'équation (1) admet une racine entière  $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\varphi_n = P(\Delta_n) = (\Delta_n - m \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})^2$ . La matrice de  $\varphi_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est donc  $(D_n - m \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})^2 = \text{diag}(((k-m)^2)_{0 \leq k \leq n})$ . On en déduit que  $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^n)$ .

- 12 On montre de même que si l'équation (1) n'admet pas de racine entière dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , alors  $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$  (la matrice de  $\varphi_n$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  est diagonale à coefficients diagonaux non nuls).

Remarquons ensuite que  $\text{Ker } \varphi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker } \varphi_n$ .

- Si l'équation (1) n'admet pas de racine entière, alors  $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  et  $\dim \text{Ker } \varphi = 0$ .
- Si l'équation (1) admet une unique racine entière  $m$ , alors  $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$  pour tout entier  $n < m$  et  $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^m)$  pour tout entier  $n \geq m$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \text{vect}(X^m)$  et  $\dim \text{Ker } \varphi = 1$ .
- Si l'équation (1) admet deux racines entières distinctes  $m_1$  et  $m_2$ , alors, en supposant  $m_1 < m_2$ ,  $\text{Ker } \varphi_n = \{0\}$  pour tout entier  $n < m_1$ ,  $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^{m_1})$  pour tout entier  $n$  tel que  $m_1 \leq n < m_2$  et  $\text{Ker } \varphi_n = \text{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$  pour tout entier  $n \geq m_2$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \text{vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$  et  $\dim \text{Ker } \varphi = 2$ .

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \quad (2)$$

$$u'' + (a-1)u' + bu = 0 \quad (3)$$

**13** L'équation différentielle (2) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. De plus, elle est résolue sur les intervalles I et J.

L'ensemble des solutions de (2) sur I ou sur J est donc un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2.

**14** Comme  $y$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $g = y \circ \exp$  l'est également sur  $\mathbb{R}$ . Remarquons alors que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$y(x) = g(\ln x) \quad y'(x) = \frac{1}{x} g'(\ln x) \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\ln x) + \frac{1}{x^2} g''(\ln x)$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -g'(\ln x) + g''(\ln x) + ag'(\ln x) + bg(\ln x) = 0$$

et, comme  $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) = 0$$

Ainsi  $g$  est bien solution de l'équation différentielle (3) sur  $\mathbb{R}$ .

**15** Comme  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $y = g \circ \ln$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$g(t) = y(e^t) \quad g'(t) = e^t y'(e^t) \quad g''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) = 0$$

ce qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + (a-1)e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0$$

Comme  $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$$

donc  $y$  est bien solution de (2) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**16** Supposons  $a = 3$  et  $b = 1$ . L'équation caractéristique associée à (3) est alors  $r^2 + 2r + 1 = 0$ . Son unique racine est  $-1$  donc les solutions de (3) sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{-t}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Les questions précédentes montrent alors que les solutions de (2) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{x}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Supposons  $a = 1$  et  $b = 4$ . L'équation caractéristique associée à (3) est alors  $r^2 + 4 = 0$ . Ses racines sont  $2i$  et  $-2i$  donc les solutions à valeurs réelles de (3) sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Les questions précédentes montrent alors que les solutions de (2) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cos(2 \ln x) + \mu \sin(2 \ln x), \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

**17** Comme  $y$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $h = y \circ (-\exp)$  l'est également sur  $\mathbb{R}$ . Remarquons alors que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$y(x) = h(\ln(-x)) \quad y'(x) = \frac{1}{x} h'(\ln(-x)) \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} h'(\ln(-x)) + \frac{1}{x^2} h''(\ln(-x))$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) + a x y'(x) + b y(x) = 0$$

ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -h'(\ln(-x)) + h''(\ln(-x)) + a h'(\ln(-x)) + b h(\ln(-x)) = 0$$

et, comme  $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, h''(t) + (a-1)h'(t) + b h(t) = 0$$

Ainsi  $h$  est bien solution de l'équation différentielle (3) sur  $\mathbb{R}$ .

**18** Réciproquement, on montre que, si  $h$  est solution de (3) sur  $\mathbb{R}$ , alors  $y : x \mapsto h(\ln(-x))$  est solution de (2) sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Pour  $a = 1$  et  $b = -4$ , les solutions de (3) sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-2t}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit que les solutions de (2) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{2 \ln(-x)} + \mu e^{-2 \ln(-x)}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore les fonctions

$$x \mapsto \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Ce qui précède montre également que les solutions de (2) sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont également les fonctions

$$x \mapsto \lambda x^2 + \frac{\mu}{x^2}, \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Soit alors  $f$  une éventuelle solution de (2) de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Il existe alors  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x^2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \gamma x^2 + \frac{\delta}{x^2}$$

$f$  doit être continue en 0 : elle doit notamment avoir une limite finie en 0, ce qui impose  $\beta = \delta = 0$ . Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $f''$  doit être continue en 0, ce qui impose  $\alpha = \beta$ .

Réciproquement, on vérifie que les fonctions  $x \mapsto \lambda x^2$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  sont bien solutions de (2) sur  $\mathbb{R}$ .

Finalement l'ensemble des solutions de (2) sur  $\mathbb{R}$  est  $\text{vect}(x \mapsto x^2)$ .

**19** Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière. Alors son rayon de convergence  $R$  est définie par

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0 \tag{4}$$

**20** Pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \\ J'_0(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1} \\ J'_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} \end{aligned}$$

Comme  $J_0$  est solution de PBEquaDiffLG08 :rep :eq :4,

$$\forall x \in ]-R, R[, \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = 0$$

ou encore

$$\forall x \in ]-R, R[, \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k = 0$$

et enfin

$$c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k = 0$$

Par unicité du développement en série entière,  $c_1 = 0$  et  $c_k = -\frac{1}{k^2} c_{k-2}$  pour tout entier  $k \geq 2$ . On sait de plus que  $c_0 = 1$ .

On en déduit par récurrence que  $c_{2k+1} = 0$  et  $c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**21** On utilise la règle de d'Alembert. Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{c_{2k+2} x^{2k+2}}{c_{2k} x^{2k}} \right| = \frac{x^2}{(2k+2)^2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que le rayon de convergence de la série entière  $\sum c_k x^k$  est  $+\infty$ .

**22** Supposons que  $(J_0, f)$  soit liée dans l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, r[$ . Il existe donc  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  non nul tel que

$$\forall x \in ]0, r[, \alpha J_0(x) + \beta f(x) = 0$$

Supposons  $\beta = 0$ . Alors  $\alpha \neq 0$  car  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . On en déduit que  $J_0(x) = 0$  pour tout  $x \in ]0, r[$ . Cela signifierait que  $c_k = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  par unicité du développement en série entière, ce qui contredit l'expression de  $c_{2k}$  trouvée précédemment. Ainsi  $\beta \neq 0$  et donc

$$\forall x \in ]0, r[, f(x) = -\frac{\alpha}{\beta} J_0(x)$$

Comme  $J_0$  est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0 et donc  $f$  également.

**23** Si  $\sum \beta_k x^k$  est solution, alors, en posant  $R = \min(R_\alpha, R_\beta) > 0$ , on obtient par produit de Cauchy,

$$\forall x \in ]-R, R[, \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right) x^n = 1$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme  $\alpha_0 = 1$ , on en déduit le résultat voulu.

**24** Puisque  $0 < r < R_\alpha$ , la suite  $(\alpha_k r^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée par définition du rayon de convergence. Il existe donc  $M > 0$  tel que  $|\alpha_k r^k| \leq M$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  i.e.  $|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

**25** Il existe une unique  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vérifiant (5) : c'est la suite définie par  $\beta_0 = 1$  et la relation de récurrence  $\beta_n = -\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Remarquons qu'alors  $\beta_1 = -\alpha_1 \beta_0 = -\alpha_1$ . Mais alors,

$$|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{M}{r^1} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}$$

Supposons qu'il existe un entier  $n \geq 2$  tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$$

Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
 |\beta_n| &= \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_{n-k} \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| |\beta_{n-k}| \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{n-k}| |\beta_k| \\
 &= |\alpha_n| + \sum_{k=1}^{n-1} |\alpha_{n-k}| |\beta_k| \\
 &\leq \frac{M}{r^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{M}{r^{n-k}} \cdot \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \\
 &= \frac{M}{r^n} + \frac{M^2}{r^n} \sum_{k=1}^{n-1} (M+1)^{k-1} \\
 &= \frac{M}{r^n} + \frac{M^2}{r^n} \sum_{k=0}^{n-2} (M+1)^k \\
 &= \frac{M}{r^n} + \frac{M^2}{r^n} \cdot \frac{(M+1)^{n-1} - 1}{(M+1) - 1} \\
 &= \frac{M}{r^n} + \frac{M}{r^n} ((M+1)^{n-1} - 1) \\
 &= \frac{M}{r^n} (M+1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

On en déduit bien par récurrence forte que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, |\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$$

**26** En tant que série géométrique le rayon de convergence de la série entière  $\sum \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} x^k$  est  $\frac{r}{M+1}$ . La question précédente permet alors d'affirmer que  $R_\beta \geq \frac{r}{M+1}$ .

**27** Pour tout  $x \in ]0, r[$ ,

$$\begin{aligned}
 x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) &= x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x^2 \lambda(x) J_0''(x) + x \lambda'(x) J_0(x) + x \lambda(x) J_0'(x) + x^2 \lambda(x) J_0(x) \\
 &= \lambda(x) (x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x)) + x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x \lambda'(x) J_0(x) \\
 &= x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x \lambda'(x) J_0(x)
 \end{aligned}$$

car  $J_0$  est solution de (4).

Par ailleurs, en posant  $z : x \mapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$ , pour tout  $x \in ]0, r[$ ,

$$\begin{aligned}
 z'(x) &= J_0^2(x) \lambda'(x) + 2x J_0'(x) J_0(x) + x J_0^2(x) \lambda''(x) \\
 &= J_0(x) (J_0(x) \lambda'(x) + 2x J_0'(x) + x J_0(x) \lambda''(x)) \\
 &= J_0(x) (x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x))
 \end{aligned}$$

Si  $y$  est solution de (4) sur  $]0, r[$ ,  $z'$  est donc nulle sur  $]0, r[$ .

Réciproquement, supposons que  $z'$  est nulle sur  $]0, r[$ . Posons  $w : x \mapsto x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x)$ . Supposons qu'il existe  $a \in ]0, r[$  tel que  $w(a) \neq 0$ . Par continuité de  $w$ ,  $w$  ne s'annulerait pas sur un intervalle ouvert non vide contenant  $a$  et inclus dans  $]0, r[$ . Par conséquent,  $J_0$  serait nulle sur cet intervalle et donc  $J_0'$  également. On en déduirait que  $J_0(a) = J_0'(a) = 0$ . Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy,  $J_0$  serait constamment nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par continuité de  $J_0$  en 0, on aurait donc  $c_0 = J_0(0) = 1$ , ce qui n'est pas. On a donc prouvé par l'absurde que  $z'$  était nulle sur  $]0, r[$ .

**28** Comme  $J_0$  est développable en une série entière de rayon de convergence infini, on en déduit par produit de Cauchy que  $J_0^2$  également. De plus,  $J_0^2(0) = c_0^2 = 1$ .

**29**  $J_0^2$  est développable en série entière et  $J_0^2(0) = 1$  donc, d'après ce qui précède, il existe une série entière  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k x^k$  de rayon de convergence  $r > 0$  tel que

$$\forall x \in ]-r, r[, J_0^2(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k = 1$$

ou encore, comme  $\beta_0 = 1$ ,

$$\forall x \in ]-r, r[, xJ_0^2(x) \left( \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1} \right) = 1$$

En posant  $\lambda : \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$  qui est bien de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, r[$ , on a donc

$$\forall x \in ]0, r[, xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1$$

Notamment,  $x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$  est de dérivée nulle sur  $]0, r[$ . D'après la question **27**,  $x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$  est solution de 4 sur  $]0, r[$ .

Comme  $J_0$  est développable en une série entière de rayon de convergence infini, on obtient par produit de Cauchy, que  $\eta x \mapsto J_0(x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$  est développable en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à  $r$ . En posant  $R_\eta = r$ , on obtient bien que  $x \mapsto J_0(x)\lambda(x) = \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$  est solution de 4 sur  $]0, R_\eta[$ .

**30** Posons  $f : x \in ]0, R_\eta[ \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$ .  $\eta$  est continue en 0 comme somme d'une série entière de rayon de convergence  $R_\eta > 0$ . De même,  $J_0$  est continue en 0 de sorte que  $\lim_0 J_0 = J_0(0) = 1$ . On en déduit que  $\lim_0 f = -\infty$ . Notamment,  $f$  n'est pas bornée au voisinage de 0. D'après la question **22**, la famille  $(J_0, f)$  est libre. L'ensemble des solutions de 4 sur  $]0, R_\eta[$  étant un espace vectoriel de dimension 2,  $(J_0, f)$  en est donc une base. L'ensemble des solutions de 4 sur  $]0, R_\eta[$  est donc  $\text{vect}(J_0, f)$ .