Devoir surveillé n°01

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – D'après E3A Maths 1 MP 2018

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ f_n = h_n - \ln(n)$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n}),\ v_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$$

1 Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x+\ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

2 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quel est le signe de u_n ?

3 Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

4 Etudier la fonction $(f : x \mapsto x - \ln(1+x))$ sur $[0,1]$.

5 Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est convergente.

6 Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.

En déduire une expression de $\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} (v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3.

7 Que peut-on dire des suites $(\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} v_n)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Dans la suite de l'exercice, on note γ la somme des séries $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

8 Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0,1[$.

9 Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$$

10 Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

11 Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ.

Indication : exprimer les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1}^{N} u_n$ en fonction des termes de la suite (f_n).

12 Soit r un entier naturel > 1.

12.a Dessiner le graphe de la fonction $(x \mapsto 1/x^r)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

12.b Soit a un nombre réel > 0. Exprimer en fonction de a et r :

$$\mathrm{I}(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$$

12.c Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^r} \leq \frac{1}{k^r} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^r}$$

12.d En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^r}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

12.e Soit (w_n) une suite de nombres réels qui converge vers 0.
On suppose que la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell > 0$.
Démontrer que la suite $(n^{r-1}w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de ℓ et r sa limite.

13 Démontrer qu'il existe un nombre réel α que l'on explicitera tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Indication : on appliquera les résultats de la question **12** à une suite bien choisie.

Exercice 1 ★★ **Sommation d'Abel (d'après CCP MP 2014)**

Soient $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\geq n_0}$ deux suites complexes. On définit alors deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ de la manière suivante :

$$\forall n \geq n_0,\ \mathrm{A}_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$
$$\forall n \geq n_0,\ b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k \mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \sum_{k=n_0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$ pour tout entier $n \geq n_0$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (A_n) est bornée et que (B_n) est une suite réelle décroissante de limite nulle.

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} b_n$ converge.

b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n\mathrm{B}_n$ converge.

c. En déduire en particulier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} (-1)^n\mathrm{B}_n$ converge.

3. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$. On donnera le résultat sous la forme $re^{i\varphi}$ où $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2$.

b. Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$.
On précisera notamment dans les cas de convergence s'il s'agit ou non de convergence absolue. De même, dans les cas de divergence, on précisera s'il s'agit ou non de divergence grossière.

c. En déduire la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

4. Montrer que si la suite (B_n) converge vers 0, si la suite (A_n) est bornée et si la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} b_n$ est absolument convergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n\mathrm{B}_n$ est convergente.

Exercice 2 **BECEAS 2021 – Un calcul de $\zeta(2)$**

On pose, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{C}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (\cos x)^{2n} \, \mathrm{d}x$$

1. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\mathrm{C}_n = (2n-1)(\mathrm{C}_{n-1} - \mathrm{C}_n)$$

2. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 (\cos x)^{2n-2} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{C}_n}{2n-1} = \frac{\mathrm{C}_{n-1}}{2n}$$

3. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\mathrm{C}_n = (2n-1)n\mathrm{D}_{n-1} - 2n^2\mathrm{D}_n$$

4. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

$$\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}} - \frac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}\right)$$

5. **a.** Justifier, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la minoration $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la majoration

$$\mathrm{D}_n \leq \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\mathrm{C}_n}{2n+2}$$

6. Prouver l'égalité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$