Devoir surveillé n°03

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 ★★ **CCINP Maths 1 TSI 2005**

On rappelle que l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)}{u}\,\mathrm{d}u$ où a est un réel.

2. **a.** Justifier la convergence de l'intégrale $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

b. Calculer J.

3. On considère $\mathrm{K}(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(au)\sin(bu)}{u^2}\,\mathrm{d}u$, où a et b sont des réels.

a. Exprimer $\mathrm{K}(a,b)$ en fonction de $\mathrm{I}(a+b)$ et $\mathrm{I}(a-b)$.

b. En déduire les valeurs de $\mathrm{K}(a,b)$ en distinguant les différentes régions du plan (a,b).

c. Donner une expression de $\mathrm{K}(a,b)$ regroupant les différents cas.

Exercice 2 ★★ **D'après E3A Maths 1 PSI 2017**

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des applications continues de I vers $\mathbb{R}$.
On note E l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ tels que f^2 est intégrable sur I, c'est-à-dire tels que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

Questions de cours

1. Prouver que pour tous réels a et b, $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

2. Montrer que le produit de deux éléments de E est une application intégrable sur I.

3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Soit φ l'application qui au couple $(f, g) \in \mathrm{E}^2$ associe le réel : $\varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E que l'on notera par la suite $\langle \mid \rangle$.

Partie 1

Soit h élément de $\mathcal{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, tel que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(t) \, \mathrm{d}t$ converge.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{J}_n = \int_n^{n+1} h(t) \, \mathrm{d}t$.
Prouver que : $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{J}_n = 0$.

6. En déduire l'existence d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que : $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} h(a_n) = 0$.

Partie 2

Soit F l'ensemble des applications f de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 \, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)^2 \, \mathrm{d}t$ convergent. Soit $f \in \mathrm{F}$.

7. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) \, \mathrm{d}t$ convergent.

8. Etablir l'égalité : $\int_0^{+\infty} t f(t) f'(t) \, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$.
On pourra, par exemple, utiliser un résultat de la partie 1.

9. Démontrer

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^2 \leq 4\left(\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 \, \mathrm{d}t\right) \tag{$\star$}$$

10. Déterminer toutes les applications $f \in \mathrm{F}$ pour lesquelles il y a égalité dans l'inégalité $(\star)$.

Exercice 3 ★★ **D'après E3A PSI 2009**

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé «règle de Raabe-Duhamel». Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
Soit (α_n) une suite réelle. On rappelle que la relation $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

1 Règle de Raabe-Duhamel

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

- **a.** Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq \mathrm{N}$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
- **b.** Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq \mathrm{N}$, on ait $u_n \leq \mathrm{K}v_n$.
- **c.** Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4. On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5. Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{1}{n\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

2 Applications

Les questions qui suivent sont indépendantes et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

6. Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

7. Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t^4+1)^n}$.

- **a.** Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.
- **b.** Etablir que $\mathrm{I}_n = 4n(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1})$.
- **c.** En déduire la nature de la série $\sum \mathrm{I}_n$.