

DEVOIR SURVEILLÉ N°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

Problème 1

1 Pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + t^2 \leq 2$ donc $\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$. Ainsi $I_n \geq \int_0^1 \frac{1}{2^n} dt = \frac{1}{2^n}$.

2 L'application $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, $\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ avec $2n \geq 2 > 1$. On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ sur $[0, +\infty[$ puis l'existence de K_n .

Il est clair que $K_1 = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

3 Supposons $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 < 1 + t \leq 1 + t^2$ de sorte que $0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(1+t)^n}$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^n} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \frac{2}{2^n(n-1)}$$

Or $\frac{1}{2^n(n-1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^n n}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$$

4 D'après la question précédente, $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n n}\right)$. A fortiori, $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Mais d'après la question 1, $\frac{1}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(I_n)$ donc $K_n - I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(I_n)$ i.e. $K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

5 Par intégration par parties,

$$K_n = \int_0^{+\infty} 1 \cdot (1+t^2)^{-n} dt = [t(1+t^2)^{-n}]_0^{+\infty} + 2n \int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1} dt$$

Cette intégration par parties est légitime car

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t(1+t^2)^{-n} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K_n &= 2n \int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2-1)(1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n} dt - 2n \int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-n-1} dt \\ &= 2nK_n - 2nK_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n}K_n$$

6 D'après la question précédente, $K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}K_n$. On montre par récurrence que $K_n = \frac{(2n-2)! \pi}{2^{2n-1}(n-1)!^2}$ pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de la formule de Stirling, on montre que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

7 Il suffit d'effectuer le changement de variable linéaire $u = \sqrt{nt}$.

8 On pose $f_n : u \in \mathbb{R}_+ \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Pour $u \leq \sqrt{n}$, $f_n(u) = \exp(-n \ln(1+u^2/n))$ donc (f_n) converge

simplement sur \mathbb{R}_+ vers $u \mapsto e^{-u^2}$. De plus, par concavité de \ln , $f_n(u) \leq \exp(-u^2)$ pour $u \in \mathbb{R}_+$. La fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{du}{(1+u^2/n)^n} = \int_0^{+\infty} f_n(u) du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

9 Avec les questions précédentes,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Via le changement de variable, $t = u/\sqrt{2}$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

Par parité de $u \mapsto e^{-u^2/2}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}$$

10 Comme $\varphi(t) \leq \frac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geq x$,

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt$$

De plus, $-\varphi$ est une primitive de $t \mapsto t\varphi(t)$ donc

$$\int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt = -[\varphi(t)]_x^{+\infty} = \varphi(x)$$

car $\lim_{+\infty} \varphi = 0$.

REMARQUE. Ceci prouve en sus la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt$.

On a donc bien

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

11 On considère la fonction

$$\Psi : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (x^2 + 1) \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - x\varphi(x)$$

La fonction Ψ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - (x^2 + 1)\varphi(x) - \varphi(x) - x\varphi'(x)$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Psi'(x) = 2x \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - 2\varphi(x) \leq 0$$

en utilisant l'inégalité de la question précédente. La fonction Ψ est donc décroissante sur \mathbb{R}_+^* : elle admet donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$. Or, comme φ est positive, $\Psi(x) \geq -x\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\varphi(x) = 0$ donc $\ell \geq 0$ par passage à la limite. Par décroissance de Ψ sur \mathbb{R}_+^* , $\Psi(x) \geq \ell \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

12 Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$, $1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après les deux questions précédentes,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{x\varphi(x)}{x^2 + 1} \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

Par encadrement, $1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$.

13 Notons $B_0 = \emptyset$ et $B_p = \bigcup_{1 \leq k \leq p} \{|R_k| \geq 3x\}$ pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $B_{p-1} \subset B_p$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ de sorte que

$$A = \bigcup_{p=1}^n \{|R_p| \geq 3x\} = B_n = \bigsqcup_{p=1}^n B_p \setminus B_{p-1} = \bigsqcup_{p=1}^n A_p$$

car $A_p = B_p \setminus B_{p-1}$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

14 Remarquons que

$$A = (\{|R_n| \geq x\} \cap A) \sqcup (\{|R_n| < x\} \cap A) \subset \{|R_n| \geq x\} \sqcup \left(\bigcup_{p=1}^n (\{|R_n| < x\} \cap A_p) \right)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{p=1}^n (\{|R_n| < x\} \cap A_p)\right) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(\{|R_n| < x\} \cap A_p)$$

15 Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par inégalité triangulaire, $|R_n - R_p| \geq |R_p| - |R_n|$. Ainsi

$$\{|R_p| \geq 3x\} \cap \{|R_n| < x\} \subset \{|R_p| - |R_n| > 2x\} \subset \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

Finalement,

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p$$

et

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset \{|R_p| \geq 3x\} \cap \{|R_n| < x\} \subset \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

donc

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

16 Tout d'abord, d'après la question précédente,

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\})$$

Ainsi

$$\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\})$$

Or, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_p s'écrit en fonction des variables aléatoires Z_1, \dots, Z_p tandis que $R_n - R_p = \sum_{k=p+1}^n Z_k$. Comme Z_1, \dots, Z_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, le lemme des coalitions garantit que les événements A_p et $\{|R_n - R_p| > 2x\}$ sont indépendants. Ainsi

$$\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}) = \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p) \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}) \leq \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}) \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p)$$

Comme $A = \bigcap_{p=1}^n A_p$, $\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p) = \mathbb{P}(A) \leq 1$. Ainsi

$$\sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\})$$

puis

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\})$$

17 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|a| \leq x$ et $|b| \leq x$ i.e. $-x \leq a \leq x$ et $-x \leq b \leq x$. Alors $-2x \leq a - b \leq 2x$ i.e. $|a - b| \leq 2x$. Ainsi, pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\{|R_n| \leq x\} \cup \{|R_p| \geq x\} \subset \{|R_n - R_p| \leq 2x\}$$

puis, par passage au complémentaire,

$$\{|R_n - R_p| > 2x\} \subset \{|R_n| > x\} \cup \{|R_p| > x\} \subset \{|R_n| \geq x\} \cup \{|R_p| \geq x\}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\} \cup \{|R_p| \geq x\}) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + \mathbb{P}(\{|R_p| \geq x\}) \leq 2 \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geq x\})$$

puis

$$\max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_n - R_p| > 2x\}) \leq 2 \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geq x\})$$

Avec la question précédente,

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\{|R_n| \geq x\}) + 2 \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geq x\}) \leq 3 \max_{1 \leq p \leq n} \mathbb{P}(\{|R_p| \geq x\})$$

18 On vérifie sans peine que $x_{n, n-k} = -x_{n, k}$.

19 φ est bornée car à valeurs dans $]0, 1/\sqrt{2\pi}]$. B_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs donc B_n est également bornée. On en déduit que $B_n - \varphi$ est bornée, ce qui justifie l'existence de Δ_n .

20 Posons $I_{n, k} = \left] x_{n, k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n, k} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right[$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ainsi que $y_{n, k} = -\sqrt{n} + \frac{2k-1}{\sqrt{n}}$ pour $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $x \in I_{n, k}$, $-x \in I_{n, n-k}$ et

$$B_n(-x) = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{n-k} \frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = B_n(x)$$

De plus, pour $x \in \left] -\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\cup \left] \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$, $-x \in \left] -\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right[\cup \left] \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty \right[$ et $B_n(-x) = B_n(x)$.

La partie $A = \mathbb{R} \setminus \{y_{n, k}, k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket\}$ est donc symétrique par rapport à 0 et la restriction de B_n à A est paire. Comme φ est paire sur \mathbb{R} , la restriction de $\psi_n = |B_n - \varphi|$ à A est également paire. On en déduit que $\psi_n(A) = \psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)$.

Remarquons que B_n est continue à droite sur \mathbb{R} . Comme φ est continue sur \mathbb{R} , ψ_n est continue à droite sur \mathbb{R} . On en déduit que $\psi_n(\mathbb{R}) = \overline{\psi_n(A)}$ et que $\psi_n(\mathbb{R}_+) = \overline{\psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)}$. En effet, on peut par exemple constater que tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite à valeurs dans $A \cap [x, +\infty[$.

Comme $\psi_n(A) = \psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)$, on a également $\overline{\psi_n(A)} = \overline{\psi_n(A \cap \mathbb{R}_+)}$ i.e. $\psi_n(\mathbb{R}) = \psi_n(\mathbb{R}_+)$. Ainsi

$$\Delta_n = \sup_{\mathbb{R}} \psi_n = \sup_{\mathbb{R}} \psi_n(\mathbb{R}) = \sup_{\mathbb{R}_+} \psi_n(\mathbb{R}_+) = \sup_{\mathbb{R}_+} \Psi_n = \sup_{x \geq 0} |B_n(x) - \varphi(x)|$$

21 Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $I_{n, k} \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$. Alors $x_{n, k} + \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ i.e. $2k > n - 1$. Remarquons que pour un tel k ,

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n-1-2k}{(k+1)!(n-k)!} < 0$$

De plus, $\binom{n}{n} = 1 > 0$. On en déduit que B_n est bien décroissante sur \mathbb{R}_+ .

22 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in I_n$. Alors

$$0 \leq -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}} \leq \ell + 1$$

de sorte que

$$\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} + \frac{\ell + 1}{2} \sqrt{n}$$

Notamment, $k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ par minoration. On peut donc écrire

$$k! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

Mais les inégalités précédentes montrent également que $k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ de sorte que

$$k! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

De même,

$$\frac{n}{2} - \frac{\ell + 1}{2} \sqrt{n} \leq n - k \leq \frac{n}{2}$$

donc $n - k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Ainsi

$$(n - k)! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{n - k}{e}\right)^{n - k} \sqrt{2\pi(n - k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n - k}\right)\right)$$

Mais à nouveau, $n - k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ donc

$$(n - k)! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{n - k}{e}\right)^{n - k} \sqrt{2\pi(n - k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} k!(n - k) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} \left(\frac{n - k}{e}\right)^{n - k} \sqrt{2\pi(n - k)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n - k)^{n - k + 1/2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

23 A nouveau,

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

de sorte qu'avec la question précédente,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{n^n \sqrt{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{2\pi k} k^{k+1/2} (n - k)^{n - k + 1/2}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} B_n(x_{n,k}) &= \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{n+1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{n+1} k^{k+1/2} (n - k)^{n - k + 1/2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{k+1/2} n^{n - k + 1/2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{2^{k+1/2} 2^{n - k + 1/2} k^{k+1/2} (n - k)^{n - k + 1/2}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n - k + 1/2}} \end{aligned}$$

24 Puisque $x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}$,

$$1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = \frac{2k}{n} \qquad 1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} = 2 - \frac{2k}{n} \qquad \frac{x_{n,k}}{2} \sqrt{n} = k - n/2$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k-n/2} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n/2-k} \\
&= \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{k+1/2} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{n-k+1/2} \\
&= \left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
B_n(x_{n,k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Par définition de $I_{n,k}$, $0 \leq x_{n,k} \leq \ell + 1$ donc $x_{n,k}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} &= \exp\left(-\frac{n+1}{2} \ln\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{n}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(-\frac{x_{n,k}^2}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^4}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{n}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \frac{x_{n,k}^2}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \exp\left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \exp\left(-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \ln\left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \left(\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} &= \exp\left(\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n} \left(-\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{x_{n,k}^2}{n}\right)\right)\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
B_n(x_{n,k}) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)
\end{aligned}$$

25 D'après la question précédente,

$$B_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \varphi(x_{n,k}) \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Comme φ est bornée,

$$B_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Notamment,

$$B_n(x_{n,k}) - \varphi - x_{n,k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Il existe donc $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_0, \forall k \in I_n, |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Comme $\sqrt{n} + 1/\sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\sqrt{n} + 1/\sqrt{n} \geq \ell$.

La fonction φ est continue sur le segment $[0, \ell]$ donc elle y est uniformément continue. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, \ell], |x - y| \leq \alpha \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

On choisit alors $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{N_2}} \leq \alpha$. A fortiori, pour tout $n \geq N_2$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \alpha$.

Posons alors $n_1 = \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Soit $n \geq N_1$. Soit également $x \in [0, \ell]$. Puisque $n \geq N_1$, $[0, \ell] \subset [0, \sqrt{n} + 1/\sqrt{n}]$. Il existe donc $k \in I_n$ tel que $x \in [x_{n,k} - 1/\sqrt{n}, x_{n,k} + 1/\sqrt{n}]$. Alors $|x - x_{n,k}| \leq 1/\sqrt{n} \leq \alpha$ car $n \geq N_2$ de sorte que $|\varphi(x) - \varphi(x_{n,k})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Enfin, comme $n \geq N_0$, $|B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Par inégalité triangulaire,

$$|B_n(x) - \varphi(x)| = |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x)| \leq |B_n(x_{n,k}) - \varphi(x_{n,k})| + |\varphi(x_{n,k}) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

26 On répète la question précédente avec $x = \ell$ et $\varepsilon = 2\varphi(\ell) > 0$. Ainsi il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, $|B_n(\ell) - \varphi(\ell)| \leq \varphi(\ell)$ puis

$$B_n(\ell) = |B_n(\ell)| = |(B_n(\ell) - \varphi(\ell)) + \varphi(\ell)| \leq |B_n(\ell) - \varphi(\ell)| + |\varphi(\ell)| \leq 2\varphi(\ell)$$

27 Soit $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $x \in [0, \ell]$, alors $|B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $x \in [\ell, +\infty[$, donc, par décroissance de B_n et φ

$$|B_n(x) - \varphi(x)| \leq B_n(x) + \varphi(x) \leq B_n(\ell) + \varphi(\ell) \leq 3\varphi(\ell) \leq \frac{3\varepsilon}{2}$$

Ainsi pour $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$\Delta_n = \sup_{\mathbb{R}} |B_n - \varphi| = \sup_{\mathbb{R}_+} |B_n - \varphi| \leq \frac{3\varepsilon}{2}$$

On en déduit que (Δ_n) converge vers 0.

28 Remarquons que

$$\int_{u_n}^{v_n} f_n(x) dx - \int_u^v f(x) dx = \int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x)) dx + \int_{u_n}^u f(x) dx + \int_v^{v_n} f(x) dx$$

D'une part,

$$\left| \int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq |v_n - u_n| \|f_n - f\|_{\infty, I}$$

Or $|u_n - v_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |u - v|$ et $\|f_n - f\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$\int_{u_n}^{v_n} (f_n(x) - f(x)) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, comme (u_n) converge vers u , $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\}$ est un fermé borné inclus dans I . Il existe alors $(a, b) \in I^2$ tel que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{u\} \subset [a, b] \subset I$. Comme f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, elle y est bornée. Ainsi

$$\left| \int_{u_n}^u f(x) dx \right| \leq \int_{\min(u_n, u)}^{\max(u_n, u)} |f(x)| dx \leq |u_n - u| \|f\|_{\infty, [a, b]}$$

On en déduit que $\int_{u_n}^u f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De même, $\int_v^{v_n} f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement, $\int_{u_n}^{v_n} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_u^v f(x) dx$.

29 Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors

$$\int_{x_{n,j-1/\sqrt{n}}}^{x_{n,j+1/\sqrt{n}}} B_n(x) dx = 2\sqrt{n} \frac{\sqrt{n}}{2} \binom{n}{j} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j}$$

Or les x_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre 1/2 donc T_n suit la loi binomiale de paramètres n et 1/2. On en déduit que $\mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{j}$.

30 On remarque que $S_n = 2T_n - n$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{u\sqrt{n} \leq 2T_n - n \leq v\sqrt{n}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\left\{\frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leq T_n \leq \frac{n + v\sqrt{n}}{2}\right\}\right) = \sum_{j \in J_n} \mathbb{P}(\{T_n = j\})$$

31 Posons $a_n = \left\lfloor \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \right\rfloor$ et $b_n = \left\lfloor \frac{n + v\sqrt{n}}{2} \right\rfloor$ de sorte que $J_n = \llbracket a_n, b_n \rrbracket$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \sum_{j=a_n}^{b_n} \mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \sum_{j=a_n}^{b_n} \int_{x_{n,j-1/\sqrt{n}}}^{x_{n,j+1/\sqrt{n}}} B_n(x) dx = \int_{u_n}^{v_n} B_n(x) dx$$

en posant $u_n = -\sqrt{n} + \frac{2a_n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = -\sqrt{n} + \frac{2b_n}{\sqrt{n}}$. Or

$$\frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leq a_n < \frac{n + u\sqrt{n}}{2} + 1$$

donc

$$u \leq u_n < u + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

puis $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u$. De la même manière, $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v$. Comme (B_n) converge uniformément vers φ sur \mathbb{R} la question 28 montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left\{ u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v \right\} \right) = \int_u^v \varphi(x) dx$$

Par continuité croissante (utiliser la caractérisation séquentielle de la limite pour se ramener à des unions dénombrables)

$$\mathbb{P} \left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{v \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v \right)$$

32 Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $\left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq u \right\} = \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u \right\} \sqcup \left\{ -\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq u \right\}$. Il est clair que S_n et $-S_n$ ont même loi de sorte que $\mathbb{P}(|S_n| \geq u\sqrt{n}) = 2\mathbb{P}(S_n \geq u\sqrt{n})$. On en déduit avec la question précédente que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n| \geq u\sqrt{n}) = 2(1 - \Phi(u))$$

Or on a vu à la question 12 que $1 - \Phi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(u)}{u}$. A fortiori, $1 - \Phi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$. Il existe donc $x_0 \in [1, +\infty[$ tel que

$$\forall x \geq x_0, 2x^2(1 - \Phi(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit donc $x \geq x_0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^2 \mathbb{P}(|S_n| \geq x\sqrt{n}) = 2x^2(1 - \Phi(x))$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq x\sqrt{n}) \leq 2x^2(1 - \Phi(x)) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

33 D'après la question 17,

$$x^2 \mathbb{P} \left(\left\{ \max_{1 \leq p \leq n} |S_p| \geq 3x\sqrt{n} \right\} \right) \leq 3 \max_{1 \leq p \leq n} x^2 \mathbb{P}(|S_p| \geq x\sqrt{n})$$

Soit alors $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Si $p \geq n_x$, alors, d'après la question précédente

$$\mathbb{P}(|S_p| \geq x\sqrt{n}) \leq \mathbb{P}(|S_p| \geq x\sqrt{p}) \leq \varepsilon$$

Si $p < n_x$, remarquons que par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_p) = 0$ et, par indépendance des X_i , $\mathbb{V}(S_p) = \sum_{i=1}^p \mathbb{V}(X_i) = p$. Ainsi, par inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$x^2 \mathbb{P}(|S_p| \geq x\sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{V}(S_p)}{n} = \frac{p}{n} \leq \frac{n_x}{N} \leq \varepsilon$$

Finalement,

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, x^2 \mathbb{P}(|S_p| \geq x\sqrt{n}) \leq \varepsilon$$

ce qui permet de conclure.