Devoir surveillé n°04

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

A l'attention des 3/2

Les 3/2 pourront admettre le résultat des questions 8 et 31. Par ailleurs, toutes les variables aléatoires de l'énoncé pourront être considérées comme des «variables aléatoires de MPSI», c'est-à-dire des variables aléatoires définies sur un univers *fini*.

Problème 1 – Centrale Maths 2 MP 2023

Notations

- Dans tout le sujet, n désigne un entier naturel non nul.
- Étant donnés deux entiers naturels a et b, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $a \leq k \leq b$.
- Pour deux suites de nombres réels $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, la notation $u_m = \mathrm{O}(v_m)$ signifie qu'il existe une suite bornée $(\mathrm{M}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que l'on ait
$$\exists m_0 \in \mathbb{N},\ \forall m \geq m_0,\ u_m = \mathrm{M}_m v_m$$
- On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante, qui précise la formule de Stirling lorsque n tend vers $+\infty$:
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes.

I Résultats préliminaires

I.A Calcul d'une intégrale classique

Rappelons que n désigne un entier naturel non nul. On note

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad \mathrm{K}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$$

1 Montrer que

$$\mathrm{I}_n \geq \frac{1}{2^n}$$

2 Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

$\boxed{3}$ Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

On pourra minorer $1+t^2$ *par un polynôme de degré* 1.

$\boxed{4}$ En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\mathrm{I}_n \sim \mathrm{K}_n$$

$\boxed{5}$ Établir la relation de récurrence $\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n+1} + \frac{1}{2n}\mathrm{K}_n$.

$\boxed{6}$ En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I.B

$\boxed{7}$ Justifier que

$$\sqrt{n}\mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u$$

$\boxed{8}$ Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

$\boxed{9}$ En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{puis de} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

I.C Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Soit $x > 0$.

$\boxed{10}$ En écrivant que $\varphi(t) \leq \frac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geq x$, montrer que

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

$\boxed{11}$ À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$\boxed{12}$ En déduire un équivalent simple de $1-\Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.D Une inégalité maximale

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel non nul et $\mathrm{Z}_1, \dots, \mathrm{Z}_n$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathrm{R}_p = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Z}_i$.

On va montrer la propriété

$$\forall x > 0,\ \mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leq p\leq n} |\mathrm{R}_p| \geq 3x\right\}\right) \leq 3 \max_{1\leq p\leq n} \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_p| \geq x\}\right)$$

On admet que les différentes fonctions intervenant dans cette inégalité sont bien des variables aléatoires discrètes.

Pour simplifier, notons A l'événement $\left\{\max_{1\leq p\leq n} |\mathrm{R}_p| \geq 3x\right\}$. Ainsi,

$$\mathrm{A} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \max_{1\leq p\leq n} |\mathrm{R}_p(\omega)| \geq 3x\right\}$$

Dans le cas où $n \geq 2$, définissons de plus les événements

$$\mathrm{A}_1 = \{|\mathrm{R}_1| \geq 3x\} \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_p = \left\{\max_{1\leq i\leq p-1} |\mathrm{R}_i| < 3x\right\} \cap \left\{|\mathrm{R}_p| \geq 3x\right\}$$

pour $p \in [\![2, n]\!]$.

13 Exprimer l'événement A à l'aide des événements $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$.

14 Montrer que l'on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leq \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}\right) + \sum_{p=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\}\right)$$

15 Justifier que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a l'inclusion

$$\mathrm{A}_p \cap \{|\mathrm{R}_n| < x\} \subset \mathrm{A}_p \cap \left\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\right\}$$

16 En déduire que

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leq \mathbb{P}\left(\{|\mathrm{R}_n| \geq x\}\right) + \max_{1\leq p\leq n} \mathbb{P}\left(\left\{|\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_p| > 2x\right\}\right)$$

17 Conclure.

II Étude d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$x_{n,k} = -\sqrt{n} + \frac{2k}{\sqrt{n}}$$

De plus, on définit la fonction $\mathrm{B}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par les conditions

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \left]-\infty, -\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, && \mathrm{B}_n(x) = 0\\
&\forall k \in [\![0, n]\!], \forall x \in \left[x_{n,k} - \frac{1}{\sqrt{n}}, x_{n,k} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, && \mathrm{B}_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\\
&\forall x \in \left[\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[, && \mathrm{B}_n(x) = 0
\end{aligned}$$

L'objectif de cette partie est de montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction φ, définie dans la partieI. Autrement dit, on souhaite montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)|$$

L'usage d'une figure pour appréhender la problématique de cette partie sera vivement apprécié.

II.A

18 Comparer les réels $-x_{n,k}$ et $x_{n,n-k}$.

19 Justifier l'existence du réel Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

20 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité

$$\Delta_n = \sup_{x\geq 0} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)|$$

21 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que B_n est une application décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

On pourra distinguer selon que n est pair ou impair.

Dans la suite de cette partie, on fixe $\varepsilon > 0$. La limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ assure de l'existence d'un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $\varphi(\ell) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

II.B

Dans cette sous-partie, on va montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,\ell]} |\mathrm{B}_n(x) - \varphi(x)| = 0$$

On introduit pour cela l'ensemble

$$\mathrm{I}_n = \left\{k \in [\![0, n]\!] \mid x_{n,k} \in [0, \ell + 1]\right\}$$

dont on peut vérifier que c'est un intervalle d'entiers.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que n et k varient de sorte que $k \in \mathrm{I}_n$.

22 Montrer que l'on a

$$k!(n-k)! = 2\pi e^{-n} k^{k+1/2} (n-k)^{n-k+1/2} \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

pour n tendant vers l'infini.

On pourra utiliser la formule de Stirling rappelée en début d'énoncé.

23 En déduire que, pour n tendant vers $+\infty$, on a

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{2k}{n}\right)^{k+1/2} \left(2 - \frac{2k}{n}\right)^{n-k+1/2}}$$

24 En déduire que

$$\mathrm{B}_n\left(x_{n,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{x_{n,k}^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)^{-\frac{x_{n,k}}{2}\sqrt{n}}}$$

puis que

$$B_n(x_{n,k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_{n,k}^2}{2}\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

25 Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier $n \geq n_1$,

$$\sup_{x\in[0,\ell]} |B_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

II.C

26 Pour tout $\ell > 0$, montrer qu'il existe un entier naturel n_2, tel que, pour tout $n \geq n_2$,

$$B_n(\ell) \leq 2\varphi(\ell)$$

27 Conclure que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

III Applications

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi que X. On définit alors

$$S_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

On dit que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$. On admettra que pour tout $n \geq 1, S_n$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

III.A Théorème central limite

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge uniformément sur I vers une fonction f également continue par morceaux sur I.

28 Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (respectivement $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est une suite de nombres réels appartenant à I qui converge vers $u \in I$ (respectivement $v \in I$), montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{u_n}^{v_n} f_n(x)\, dx = \int_u^v f(x)\, dx$$

On pose, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

29 Montrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}(\{T_n = j\}) = \int_{x_{n,j}-1/\sqrt{n}}^{x_{n,j}+1/\sqrt{n}} B_n(x)\, dx$$

où $x_{n,j}$ a été défini dans la partieII.

Considérons un couple (u, v) de réels tel que $u < v$, et notons

$$J_n = \left\{j \in [\![0, n]\!] \mid \frac{n + u\sqrt{n}}{2} \leq j \leq \frac{n + v\sqrt{n}}{2}\right\}$$

30 Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \sum_{j \in J_n} \mathbb{P}\left(\{T_n = j\}\right)$$

31 En déduire que l'on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq v\right\}\right) = \int_u^v \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

puis que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left\{u \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \Phi(u)$$

où les applications φ et Φ ont été définies dans la partieI.

III.B Critère de tension

Dans cette dernière sous-partie, on fixe $\varepsilon \in]0, 1[$.

32 Montrer qu'il existe $x_0 \geq 1$ tel que l'on ait

$$\forall x \geq x_0,\ \exists n_x \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_x,\ x^2 \mathbb{P}\left(\left\{|S_n| \geq x\sqrt{n}\right\}\right) \leq \varepsilon$$

33 Pour x_0 et x comme à la question précédente, on fixe $N \geq \dfrac{n_x}{\varepsilon}$ et on choisit $n \geq N$. Montrer qu'alors

$$x^2 \mathbb{P}\left(\left\{\max_{1 \leq p \leq n} |S_p| \geq 3x\sqrt{n}\right\}\right) \leq 3\varepsilon$$