

# DEVOIR SURVEILLÉ N°05

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

## Problème 1

### Partie I –

**I.1 I.1.a** Les points P, Q et R ont pour coordonnées respectives  $(1, 0)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . On trouve sans difficulté les équations des droites suivantes :

$$(PQ) : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad (PR) : y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad (QR) : x = -\frac{1}{2}$$

**I.1.b** Le point d'affixe  $x + iy$  i.e. de coordonnées  $(x, y)$  appartient à T si et seulement si

$$x > -\frac{1}{2} \qquad y < -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \qquad y > \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

c'est-à-dire

$$2x + 1 > 0 \qquad x + \sqrt{3}y - 1 < 0 \qquad x - \sqrt{3}y - 1 < 0$$

**I.2 I.2.a** On a clairement  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc 1 est valeur propre de A.

**I.2.b** Comme A est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres i.e.  $\text{tr}(A) = 1 + \lambda + \bar{\lambda}$ . Les valeurs propres de  $A^2$  sont  $1, \lambda^2$  et  $\bar{\lambda}^2$  donc  $\text{tr}(A^2) = 1 + \lambda^2 + \bar{\lambda}^2$ .

Puisque  $\lambda = a + ib$  et  $\bar{\lambda} = a - ib$ ,

$$\text{tr}(A) = 1 + 2a \qquad \text{tr}(A^2) = 1 + 2(a^2 - b^2)$$

**I.2.c** Les coefficients de A sont tous strictement positifs donc  $\text{tr}(A) > 0$ .

Pour la même raison

$$\begin{aligned} (A^2)_{1,1} &= a_{1,1}^2 + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,3}a_{3,1} > a_{1,1}^2 \\ (A^2)_{2,2} &= a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}^2 + a_{2,3}a_{3,2} > a_{2,2}^2 \\ (A^2)_{3,3} &= a_{3,1}a_{1,3} + a_{3,2}a_{2,3} + a_{3,3}^2 > a_{3,3}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\text{tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$ .

**I.2.d** D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{tr}(A)^2 = \left( \sum_{k=1}^3 1 \cdot a_{k,k} \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^3 1^2 \right) \left( \sum_{k=1}^3 a_{k,k}^2 \right) = 3(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2) < 3 \text{tr}(A^2)$$

**I.2.e** D'une part,

$$1 + 2a = \text{tr}(A) > 0$$

D'autre part,

$$0 < 3 \text{tr}(A^2) - \text{tr}(A)^2 = 2(1 + a^2 - 3b^2 - 2a) = 2(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1)$$

**I.2.f** Remarquons que  $a - \sqrt{3}b - 1$  et  $a + \sqrt{3}b - 1$  sont de même signe. Si l'on avait  $a - \sqrt{3}b - 1 > 0$  et  $a + \sqrt{3}b - 1 > 0$ , on aurait  $a > 1$  en additionnant ces inégalités. Il s'ensuivrait que  $|\lambda|^2 = a^2 + b^2 > 1$ , ce qui n'est pas. Ainsi  $a - \sqrt{3}b - 1 < 0$  et  $a + \sqrt{3}b - 1 < 0$ . D'après la question **I.1.b**, le point d'affixe  $\lambda$  appartient à  $T$ .

**I.3 I.3.a** D'après une relation d'Euler,  $\lambda + \bar{\lambda} = 2r \cos(\theta)$  donc  $\alpha = \frac{1 + \lambda + \bar{\lambda}}{3}$ .

On remarque que  $j^2 = \bar{j}$  donc, toujours d'après une relation d'Euler,

$$j\lambda + j^2\bar{\lambda} = j\lambda + \bar{j}\lambda = re^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})} + re^{-i(\theta + \frac{2\pi}{3})} = 2 \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

puis  $\beta = \frac{1 + j\lambda + j^2\bar{\lambda}}{3}$ .

Enfin,

$$j^2\lambda + j\bar{\lambda} = \bar{j}\lambda + \bar{j}\lambda = re^{i(\theta - \frac{2\pi}{3})} + re^{-i(\theta - \frac{2\pi}{3})} = 2 \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

puis  $\gamma = \frac{1 + j^2\lambda + j\bar{\lambda}}{3}$ .

**I.3.b** Puisque  $1 + j + \bar{j} = 1 + j + j^2 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0$ , il est clair que  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ .

Par ailleurs, en posant  $\lambda = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\alpha = \frac{2a + 1}{3} > 0 \quad \beta = \frac{1 - a - \sqrt{3}b}{3} \quad \gamma = \frac{1 - a + \sqrt{3}b}{3}$$

Comme  $r \in ]0, 1[$ , et  $|\cos| \leq 1$ , il est clair que  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont strictement positifs. On en déduit que  $A$  vérifie la propriété (S).

**I.3.c** Un calcul immédiat montre que  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On a clairement  $A = \alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2$ .

**I.3.d** Un calcul immédiat donne  $\chi_J = X^3 - 1$ . Les valeurs propres de  $J$  sont les racines de  $X^3 - 1$ , à savoir  $1, j$  et  $j^2$ .

**I.3.e** Comme  $\chi_J$  est scindé à racines simples,  $J$  est diagonalisable. Il existe donc  $P \in GL_3(\mathbb{C})$  tel que  $J = PDP^{-1}$

avec  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$ . On en déduit que

$$A = P(\alpha I_3 + \beta D + \gamma D^2)P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta j + \gamma j^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \beta j^2 + \gamma j \end{pmatrix} P^{-1}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc  $\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta j + \gamma j^2$  et  $\alpha + \beta j^2 + \gamma j$ . En utilisant les expressions de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  trouvées à la question **I.3.a** et le fait que  $1 + j + j^2 = 0$ , on trouve

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \alpha + \beta j + \gamma j^2 = \bar{\lambda} \quad \alpha + \beta j^2 + \gamma j = \lambda$$

Les valeurs propres de  $A$  sont donc bien  $1, \lambda$  et  $\bar{\lambda}$ .

## Partie II –

**II.1** Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$(AU)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$$

donc  $AU = U$ . Comme  $U$  n'est pas nul, 1 est bien valeur propre de  $A$ .

**II.2 II.2.a II.2.a.i** Comme  $\det(B) = 0$ ,  $B$  n'est pas inversible. Il existe donc  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  non nul tel que  $BX = 0$ .

**II.2.a.ii** On a notamment

$$0 = (BX)_k = \sum_{j=1}^n b_{k,j}x_j$$

et donc

$$b_{k,k}x_k = - \sum_{j \neq k} b_{k,j}x_j$$

Par inégalité triangulaire

$$|b_{k,k}||x_k| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_k|$$

Remarquons que  $|x_k| > 0$  car sinon  $0 \leq |x_i| \leq |x_k| = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  puis  $X = 0$ , ce qui n'est pas. On en déduit donc que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

**II.2.b** Comme  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ,  $\det(B) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_A(\lambda) = 0$ . D'après la question précédente, il existe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|$$

c'est-à-dire

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$$

Mais comme les  $a_{k,j}$  sont positifs

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j \neq k} a_{k,j}$$

De plus,  $\sum_{j=1}^n a_{k,j} = 1$  donc  $\sum_{j \neq k} a_{k,j} = 1 - a_{k,k}$ . Finalement,

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}$$

Par inégalité triangulaire,

$$|\lambda| = |(a_{k,k} - \lambda) + a_{k,k}| \leq |a_{k,k} - \lambda| + |a_{k,k}| \leq 1 - a_{k,k} + a_{k,k} = 1$$

car  $a_{k,k} > 0$ .

**II.2.c** D'après la question précédente,

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k}$$

puis

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}|^2 \leq (1 - a_{k,k})^2$$

ou encore

$$(a_{k,k} - e^{i\theta})(a_{k,k} - e^{-i\theta}) \leq (1 - a_{k,k})^2$$

En développant, on obtient

$$a_{k,k}^2 - 2a_{k,k} \cos \theta + 1 \leq 1 - 2a_{k,k} + a_{k,k}^2$$

ou encore

$$a_{k,k} \cos \theta \geq a_{k,k}$$

Or  $a_{k,k} > 0$  donc  $\cos \theta \geq 1$ . Mais  $\cos \theta \leq 1$  donc  $\cos \theta = 1$ . Ainsi  $\theta \equiv 0[2\pi]$  puis  $\lambda = e^{i\theta} = 1$ .

**II.3 II.3.a** Comme  $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ,  $\chi_A(1) = \det(I_n - A) = 0$  donc  $\det((I_n - A)^T) = 0$  ou encore  $\det(I_n - A^T) = 0$ . Par conséquent,  $\chi_{A^T}(1) = 0$  et  $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^T)$ .

De plus,  $\text{rg}(A - I_n) = \text{rg}((A - I_n)^T) = \text{rg}(A^T - I_n)$ . D'après le théorème du rang,  $\dim \text{Ker}(A - I_n) = \dim \text{Ker}(A^T - I_n)$  i.e.  $\dim E_1(A) = \dim E_1(A^T)$ .

**II.3.b II.3.b.i** Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(A^T V)_i = V_i$  et donc

$$\sum_{j=1}^n a_{j,i} v_j = v_i$$

Par inégalité triangulaire,

$$|v_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{j,i}| |v_j| = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$$

**II.3.b.ii** En additionnant ces inégalités,

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| = \sum_{j=1}^n |v_j| \sum_{i=1}^n a_{j,i} = \sum_{j=1}^n |v_j|$$

En notant  $S_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$ , on a donc  $|v_i| \leq S_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\sum_{i=1}^n S_i - |v_i| = 0$ . Une somme de termes positifs, n'étant nulle que si chacun des termes est nul,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |v_i| = S_i = \sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j|$$

**II.3.b.iii** Ces égalités se traduisent par le fait que  $A^T |V| = |V|$ .

Supposons qu'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|v_i| = 0$ . Alors

$$\sum_{j=1}^n a_{j,i} |v_j| = |v_i| = 0$$

Comme il s'agit à nouveau d'une somme de termes positifs, on aurait  $a_{j,i} |v_j| = 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et donc  $|v_j| = 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  car les  $a_{j,i}$  ne sont pas nuls. Finalement, on aurait  $V = 0$  ce qui est exclu.

**II.3.c II.3.c.i** D'après la question précédente, les  $y_i$  ne sont pas nuls. On peut donc considérer la matrice colonne  $Z = X - \frac{x_1}{y_1} Y$  qui appartient encore à  $E_1(A^T)$  (c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ). Par construction  $z_1 = 0$ , mais d'après la question précédente,  $Z = 0$  : si  $Z$  n'était pas nul, toutes ses composantes seraient non nulles. On en déduit que tous les vecteurs de  $E_1(A^T)$  sont colinéaires à  $X$  i.e.  $\dim E_1(A^T) = 1$ .

**II.3.c.ii** Soit  $V$  un vecteur non nul de  $E_1(A^T)$ . D'après la question précédente,  $|V| \in E_1(A^T)$ . Posons  $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |v_i|} |V|$ . A nouveau,  $\Omega \in E_1(A^T)$ . Par construction,  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ . On a vu que  $|v_i| > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  donc  $\omega_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Supposons qu'il existe un vecteur  $\Omega'$  vérifiant les mêmes conditions. Alors  $\Omega'$  est colinéaire à  $\Omega$  puisque  $\dim E_1(A^T) = 1$ . Il existe donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\Omega' = \lambda \Omega$ . En fait,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  car les coordonnées de  $\Omega'$  et  $\Omega$  sont strictement positives. De plus,

$$1 = \sum_{i=1}^n \omega'_i = \lambda \sum_{i=1}^n \omega_i = \lambda$$

puis  $\Omega' = \Omega$ .

**II.3.c.iii** Enfin, puisque  $A^T \Omega = \Omega$ ,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{j,i} \omega_j = \omega_i$$

**II.3.d** On a donc montré que

- les valeurs propres de  $A$  sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de  $A$  de module 1 est 1 ;

- $E_1(A)$  est engendré par  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  ;

- les valeurs propres de  $A^T$  sont de module inférieur ou égal à 1 ;
- la seule valeur propre de  $A^T$  de module 1 est 1 ;
- aucune coordonnée d'un vecteur propre de  $A^T$  associé à la valeur propre 1 n'est nulle ;

- il existe un vecteur propre de  $A^T$  associé à la valeur propre 1 dont les coordonnées sont strictement positives et de somme 1.

#### II.4 II.4.a Montrons que $N$ est une norme.

**Positivité** Comme les  $\omega_i$  sont positifs,  $N$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

**Homogénéité** Soient  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . Alors

$$N(\lambda X) = \sum_{i=1}^n \omega_i |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i| = |\lambda| N(X)$$

**Séparation** Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $N(X) = 0$ . Alors  $\sum_{i=1}^n \omega_i |\lambda x_i| = 0$ . Mais comme il s'agit d'une somme de termes positifs,  $\omega_i |x_i| = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Les  $\omega_i$  ne sont pas nuls donc  $x_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  i.e.  $X = 0$ .

**Inégalité triangulaire** Soit  $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$ . Alors, par inégalité triangulaire dans  $\mathbb{C}$

$$N(X + Y) = \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i (|x_i| + |y_i|) = N(X) + N(Y)$$

**II.4.b** Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ . Alors, par inégalité triangulaire,

$$N(AX) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{j=1}^n a_{i,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i \right) |x_j|$$

Mais on a vu à la question II.3.c que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i = \omega_j$$

de sorte que

$$N(AX) \leq \sum_{j=1}^n \omega_j |x_j| = N(X)$$

**II.4.c** En particulier, soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$  et  $X$  un vecteur propre associé. Alors  $N(AX) \leq N(X)$  donne  $|\lambda| N(X) \leq N(X)$  puis  $|\lambda| \leq 1$  car  $N(X) > 0$  ( $X$  n'est pas nul en tant que vecteur propre).

#### II.5 II.5.a Remarquons que $\Phi(X) = \Omega^T X$ . Ainsi

$$\Phi(AX) = \Omega^T AX = (A^T \Omega)^T X$$

Or  $\Omega \in E_1(A^T)$ , donc  $A^T \Omega = \Omega$  puis  $\Phi(AX) = \Omega^T X = \Phi(X)$ .

**II.5.b**  $E_1(A) = \text{vect}(U)$  est une droite et  $\text{Ker } \Phi$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Pour montrer que  $E_1(A)$  et  $\text{Ker } \Phi$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ , il suffit donc de montrer que  $U \notin \text{Ker } \Phi$ . Or  $\Phi(U) = \sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \neq 0$  donc  $U \notin \text{Ker } \Phi$ . On en déduit que  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \text{Ker } \Phi$ .

**II.5.c** D'après la question II.5.a,

$$\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda \Phi(X)$$

Or  $\lambda \neq 1$  donc  $\Phi(X) = 0$  i.e.  $X \in \text{Ker } \Phi$ .

**II.5.d** Notons  $u$  l'endomorphisme de  $C^n$  canoniquement associé à  $A$  et  $\phi$  la forme linéaire canoniquement associée à  $\Phi$ . D'après ce qui précède,  $\phi \circ u = \phi$  et  $C^n = E_1(u) \oplus \text{Ker } \phi$ . L'égalité  $\phi \circ u = \phi$  donne notamment  $\text{Ker } \phi \circ u = \text{Ker } \phi$  de sorte que  $\text{Ker } \phi$  est stable par  $u$ . Dans une base adaptée à la décomposition en somme directe  $C^n = E_1(u) \oplus \text{Ker } \phi$ ,

la matrice de  $u$  est donc  $\left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$  avec  $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ . On en déduit que  $\chi_A = \chi_u = (X - \lambda)\chi_B$ . Si 1 était

racine de  $\chi_B$ , 1 serait valeur propre de l'endomorphisme  $u|_{\text{Ker } \phi}$  de  $\text{Ker } \phi$  induit par  $u$ . Notamment  $u|_{\text{Ker } \phi}$  admettrait un vecteur propre  $x \in \text{Ker } \phi$  associé à la valeur propre 1. Ce vecteur  $x$  serait également un vecteur propre de  $u$  associée à la même valeur propre 1. On aurait donc  $x \in E_1(u) \cap \text{Ker } \phi = \{0\}$ , ce qui contredit que  $x$  est un vecteur propre. Ainsi 1 n'est pas racine de  $\chi_B$  : 1 est donc une racine simple de  $\chi_A$  i.e. la multiplicité de la valeur propre de 1 dans  $\chi_A$  vaut 1.