DEVOIR SURVEILLÉ N°07

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 **E3A MP 2020**

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose :

$$\mathrm{P}_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$$

où $\forall t \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1. Montrer que, pour tout x réel, la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
On pourra utiliser la suite $(\ln(\mathrm{P}_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Soit $x \in \mathrm{J}$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. Etudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.

b. Démontrer que la fonction φ est continue sur J.

4. **a.** Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}}$.
On pourra utiliser un changement de variable.

b. En déduire l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 2 ★★ **E3A PSI 2020**

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $\mathrm{J} = [1, +\infty[$, la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathrm{J}$.

2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ne converge pas normalement sur J.

3. Etudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$. On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

b. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Problème 1 – CCP Maths 2 MP 2019

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

I Etude de quelques exemples

1 Justifier que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.

2 On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que ces deux matrices ont même trace, même déterminant, même rang et même polynôme caractéristique.
Ces deux matrices sont-elles semblables ? On pourra vérifier que l'une d'entre elles est diagonalisable.
Ont-elles le même polynôme minimal ?

3 On se donne deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Etablir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

- en utilisant l'endomorphisme u associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;
- en prouvant que le polynôme $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

4 Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

5 **Application.** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de rang 1 vérifiant $u^2 \neq 0$. Démontrer que u est diagonalisable.
On pourra calculer U^2.

6 Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

7 On se donne $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
Préciser une base de vecteurs propres de A.
Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A.

8 Démontrer que quels que soient les réels non nuls a et b et le réel λ, les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

II Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

9 Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

10 Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R+xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

11 Conclure que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 **Application.** Démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

III Polynôme caractéristique et polynôme minimal

On s'intéresse dans cette partie à la proposition P_n :

> Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

13 En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$.
On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

14 Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.