Devoir surveillé n°16

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Solution 1

1. On montre par récurrence que $AB^k = B^kA$ commutent pour tout $k \in \mathbb{N}$. En posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!}$, $AS_n = S_nA$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les applications $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AX$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AX$ sont linéaires et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie donc ces applications sont continues. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} AS_n = A(\lim_{n\to+\infty} S_n) = Ae^B$ et $\lim_{n\to+\infty} S_nA = (\lim_{n\to+\infty} S_nA = e^BA$. On en déduit que $Ae^B = e^BA$.

2. L'application $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \mapsto XY$ est bilinéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. De plus, les applications f_{A+B} et f_{-B} sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $g = f_{A+B}f_{-B}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = f'_{A+B}(t)f_{-B}(t) + f_{A+B}(t)f'_{-B}(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} - e^{t(A+B)}Be^{-tB}$$

Comme A et B commutent, $t(A+B)$ et B commutent pour tout $t \in \mathbb{R}$ et, d'après la question précédente, $e^{t(A+B)}$ et B commutent également. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}e^{-tB} - Be^{t(A+B)}e^{-tB} = Ag(t)$$

De plus, $g(0) = I_n = f_A(0)$ donc f_A et g sont solutions du même problème de Cauchy linéaire $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = I_n \end{cases}$. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, $g = f_A$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}$$

En choisissant $A = 0$ qui commute avec toute matrice B, on obtient $e^{tB}e^{-tB} = I_n$. Ainsi e^{-tB} est inversible d'inverse e^{tB}. En multipliant l'égalité $e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}$ à droite par e^{tB}, on obtient bien $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

3. On suppose que $f_{A+B}(t) = f_A(t)f_B(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, f_Af_B est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on obtient en dérivant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (A+B)e^{t(A+B)} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$$

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto MX$ est linéaire donc si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, Mf l'est également et sa dérivée est Mf'. Les applications $(A+B)f_{A+B}$, Af_A et Bf_B sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ et en dérivant la dernière relation, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (A+B)^2e^{t(A+B)} = A^2e^{tA}e^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + Ae^{tA}Be^{tB} + e^{tA}B^2e^{tB} = A^2e^{tA} + 2Ae^{tA}Be^{tB} + B^2e^{tB}$$

En évaluant en 0, on obtient :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

ou encore

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

ou encore $BA = AB$ i.e. A et B commutent.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme

$$\|e^A\| = \left\|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left\|\frac{A^k}{k!}\right\| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A^k\|}{k!}$$

A l'aide des propriétés **??** et **??**, on prouve aisément par récurrence que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$\|e^A\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

5. Comme A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. D'après un résultat admis dans l'énoncé, $e^A = Pe^TP^{-1}$. Comme le déterminant est un invariant de similitude, $\det(e^A) = \det(e^T)$. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T, e^P est encore triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. Ainsi

$$\det(e^T) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = e^{\operatorname{tr}(T)}$$

Comme la trace est également un invariant de similitude, $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(A)$, ce qui permet de conclure.

6. D'après la propriété **??**,

$$\|X_k\| \leq \left\|\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right\| \left\|\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right\|$$

puis avec la question **4**,

$$\|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right)\exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right) = \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$$

La question **4** donne aussi

$$\|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right)$$

Par inégalité triangulaire et croissance de l'exponentielle, on obtient

$$\|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$$

7. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, f_A est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc, par opérations $h = f_Af_B - f_{A+B}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young

$$h(t) \underset{t\to0}{=} h(0) + h'(0) + \mathcal{O}(t^2)$$

De plus, $h(0) = 0_n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} - (A+B)e^{t(A+B)}$ donc $h'(0) = 0_n$. Ainsi $h(t) \underset{t\to0}{=} \mathcal{O}(t^2)$.
On en déduit que $X_k - Y_k = h(1/k) \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/k^2)$.

8. Par télescopage,

$$\sum_{i=0}^{k-1} X_k^i(X_k - Y_k)Y_k^{k-1-i} = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^{i+1}Y_k^{k-(i+1)} - X_k^iY_k^{k-i} = X_k^kY_k^0 - X_k^0Y_k^k = X_k^k - Y_k^k$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|X_k^k - Y_k^k\| &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\|X_k^i(X_k - Y_k)Y_k^{k-1-i}\right\| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k-1} \|X_k\|^i\|X_k - Y_k\|\|Y_k\|^{k-i} \\
&\leq \|X_k - Y_k\| \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)^{i+k-i} && \text{d'après la question } \mathbf{6} \\
&= k\|X_k - Y_k\| \exp(\|A\|+\|B\|)
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $X_k^k - Y_k^k \underset{k\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1/k)$. Notamment, $\lim_{k\to+\infty} X_k^k - Y_k^k = 0$. Or pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k^k = \exp(A+B)$ donc

$$\lim_{k\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right) = \exp(A+B)$$

9. D'après la question **5**,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} &= \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \det(\exp(t\mathrm{M})) = 1\} \\ &= \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\operatorname{tr}(t\mathrm{M})} = 1\right\} \\ &= \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ t\operatorname{tr}(\mathrm{M}) = 0\} \\ &= \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(\mathrm{M}) = 0\}\end{aligned}$$

10. Montrons d'abord que pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(e^{\mathrm{M}})^\top = e^{\mathrm{M}^\top}$. Posons $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}$ de sorte que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = e^{\mathrm{M}}$. La transposition est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n^\top = (e^{\mathrm{M}})^\top$ par caractérisation séquentielle de la continuité. Mais par propriétés de la transposition,

$$\mathrm{S}_n^\top = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{M}^k)^\top}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{M}^\top)^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\mathrm{M}^\top}$$

Par unicité de la limite, $(e^{\mathrm{M}})^\top = e^{\mathrm{M}^\top}$.
Soit maitenant $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\mathrm{M}}(e^{t\mathrm{M}})^\top = e^{t\mathrm{M}}e^{t\mathrm{M}^\top} = e^{t\mathrm{M}}e^{-t\mathrm{M}} = \mathrm{I}_n$$

donc $e^{t\mathrm{M}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de sorte que $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})}$.
Réciproquement, soit $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t\mathrm{M}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t\mathrm{M}}(e^{t\mathrm{M}})^\top = \mathrm{I}_n$$

et donc, comme précédemment

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t\mathrm{M}}e^{t\mathrm{M}^\top} = \mathrm{I}_n$$

Pra bilinéarité de la multiplication matricielle, $t \mapsto e^{t\mathrm{M}}e^{t\mathrm{M}^\top}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on obtient en dérivant la relation précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{M}e^{t\mathrm{M}}e^{t\mathrm{M}^\top} + e^{t\mathrm{M}}\mathrm{M}^\top e^{t\mathrm{M}^\top} = 0$$

En évaluant en $t = 0$, on a $\mathrm{M} + \mathrm{M}^\top = 0$ i.e. $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Par double inclusion, $\mathcal{A}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

11. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t\cdot 0} = \mathrm{I}_n \in \mathrm{G}$ donc $0 \in \mathcal{A}_\mathrm{G}$.
Soient $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathcal{A}_\mathrm{G}^2$ et $(\lambda, \mu, t) \in \mathbb{R}^3$. Par définition de $\mathcal{A}_\mathrm{G}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $e^{t\lambda\mathrm{A}/k} \in \mathrm{G}$ et $e^{t\mu\mathrm{B}/k} \in \mathrm{G}$. Comme G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $(e^{t\lambda\mathrm{A}/k}e^{t\mu\mathrm{B}/k})^k \in \mathrm{G}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la partie précédente

$$\exp(t\lambda\mathrm{A} + t\mu\mathrm{B}) = \lim_{k\to+\infty} (e^{t\lambda\mathrm{A}/k}e^{t\mu\mathrm{B}/k})^k$$

Comme G est fermé, $\exp(t\lambda\mathrm{A} + t\mu\mathrm{B}) \in \mathrm{G}$ par caractérisation séquentielle des fermés. On en déduit que $\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B} \in \mathcal{A}_\mathrm{G}$.
En conclusion, $\mathcal{A}_\mathrm{G}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $e^{-t\mathrm{A}} = (e^{t\mathrm{A}})^{-1}$ et, d'après un résultat admis dans l'énoncé,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \exp(su(t)) = \exp(e^{t\mathrm{A}}(s\mathrm{B})e^{-t\mathrm{A}}) = e^{t\mathrm{A}}e^{s\mathrm{B}}e^{-t\mathrm{A}}$$

Comme A et B appartiennent à $\mathcal{A}_\mathrm{G}$, $e^{t\mathrm{A}}$, $e^{s\mathrm{B}}$ et $e^{-t\mathrm{A}}$ appartiennent à G. Puisque G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $e^{su(t)} \in \mathrm{G}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ i.e. $u(t) \in \mathcal{A}_\mathrm{G}$.

13. Par opérations, u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et notamment dérivable en 0. Comme u est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_\mathrm{G}$,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \frac{u(t) - u(0)}{t} \in \mathcal{A}_\mathrm{G}$$

De plus, $\mathcal{A}_\mathrm{G}$ est fermé en tant que sous-espace vectoriel de dimension finie donc

$$u'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{u(t) - u(0)}{t} \in \mathcal{A}_\mathrm{G}$$

Or pout tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = \mathrm{A}e^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}e^{-t\mathrm{A}} - e^{t\mathrm{A}}\mathrm{B}\mathrm{A}e^{-t\mathrm{A}}$$

donc $u'(0) = \mathrm{AB} - \mathrm{BA} = [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$. Finalement, $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] \in \mathcal{A}_\mathrm{G}$.

14. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{A}_{\mathrm{G}}$. Posons $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t\mathrm{M}}$. Alors γ est à valeurs dans G, dérivable, $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma'(0) = \mathrm{M}$ donc $\mathrm{M} \in \mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{G})$.

15. M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PTP}^{-1}$. Par conséquent

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \delta_{\mathrm{M}}(t) = \det(\mathrm{P}(\mathrm{I}_n + t\mathrm{T})\mathrm{P}^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n + t\mathrm{T})$$

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \delta_{\mathrm{M}}(t) = \prod_{j=1}^{n}(1 + t\lambda_j) \underset{t\to 0}{=} 1 + t\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + o(t)$$

Ainsi δ_{M} est dérivable en 0 et

$$\delta'_{\mathrm{M}}(0) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = \mathrm{tr}(\mathrm{T}) = \mathrm{tr}(\mathrm{M})$$

16. Notons $\gamma_{\mathrm{M}} : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{I}_n + t\mathrm{M}$ de sorte que $\delta_{\mathrm{M}} = \det \circ \gamma_{\mathrm{M}}$. D'après l'énoncé, det est différentiable en tout point et γ est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}$ donc on peut écrire par composition

$$\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = \delta'_{\mathrm{M}}(0) = \mathrm{d}\det(\gamma_{\mathrm{M}}(0)) \cdot \gamma'_{\mathrm{M}}(0) = \mathrm{d}\det(\mathrm{I}_n) \cdot \mathrm{M}$$

Ceci signifie que $\mathrm{d}\det(\mathrm{I}_n)$ est bien l'application «trace».

17. On a toujours $\mathcal{A}_{\mathrm{G}} \subset \mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{G})$ d'après la question **14**.
Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $\gamma]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma'(0) = \mathrm{M}$. Notamment, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(\gamma(t)) = 1$. L'application $\det \circ \gamma$ est dérivable puisque det est différentiable en tout point et γ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Notamment, $(\det \circ \gamma)'(0) = 0$ ou encore $\mathrm{d}\det(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$ i.e. $\mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0$. On en déduit avec la question **9** que $\mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$. Par double inclusion, $\mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$.
Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $\gamma]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dérivable telle que $\gamma(0) = \mathrm{I}_n$ et $\gamma'(0) = \mathrm{M}$. Notamment, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t)\gamma(t)^{\top} = \mathrm{I}_n$. La multiplication matricielle est bilinéaire, la transposition est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, ce qui permet d'affirmer que $\varphi : t \mapsto \gamma(t)\gamma(t)^{\top}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \gamma'(t)\gamma(t)^{\top} + \gamma(t)\gamma'(t)^{\top} = 0$$

Notamment

$$\gamma'(0)\gamma(0)^{\top} + \gamma(0)\gamma'(0)^{\top} = 0$$

ou encore $\mathrm{M}+\mathrm{M}^{\top} = 0$. On en déduit avec la question **10** que $\mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{A}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})}$. Par double inclusion, $\mathcal{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\mathrm{O}_n(\mathbb{R})}$.

18. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a donc $\chi_u = \chi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X}-\alpha)(\mathrm{X}-\beta)^2$. Puisque $\alpha \neq \beta$, $(\mathrm{X}-\alpha) \wedge (\mathrm{X}-\beta)^2 = 1$ donc, d'après le lemme des noyaux

$$\mathrm{Ker}\,\chi_u(u) = \mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3})^2$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_u(u) = 0$ donc $\mathbb{C}^3 = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$ avec $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(u-\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(u-\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^3})^2$. On sait que la dimension d'un sous-espace propre est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre associée donc $\dim \mathrm{F} = 1$ puis $\dim \mathrm{G} = 2$. On se donne un vecteur non nul e_1 de F. Comme G est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_{G} de G induit par u. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, u_{G} est trigonalisable. Il existe une base (e_2, e_3) de G dans laquelle la matrice S de u_{G} est triangulaire. De plus, $(\mathrm{X}-\beta)^2$ annule u_{G} donc β est l'unique valeur propre de u_{G}. Les coefficients diagonaux de S sont donc égaux à β. Comme $\mathbb{C}^3 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ et la matrice de u dans cette base est bien de la forme voulue.
On a donc $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \beta & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \beta\mathrm{I}_2 + a\mathrm{N}$ avec $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{N}^2 = 0$, la formule du binôme donne $\mathrm{S}^n = \beta^n\mathrm{I}_2 + na\beta^{n-1}\mathrm{N}$ pour $n \geq 1$. Finalement, $\mathrm{T}^0 = \mathrm{I}_2$ et, pour $n \geq 1$,

$$\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & na\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n\alpha^n}{n!} = e^{t\alpha} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n\beta^n}{n!} = e^{t\beta} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} na\frac{t^n\beta^{n-1}}{n!} = at\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n\beta^n}{n!} = ate^{t\beta}$$

On en déduit que

$$e^{t\mathrm{T}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n\mathrm{T}^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}$$

Il est alors clair que $\lim_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{T}} = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$.
Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$. On a alors $e^{t\mathrm{A}} = \mathrm{P}e^{t\mathrm{T}}\mathrm{P}^{-1}$ et $e^{t\mathrm{T}} = \mathrm{P}^{-1}e^{t\mathrm{A}}\mathrm{P}$. Comme $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est de dimension finie, les endomorphismes $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{PXP}^{-1}$ et $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{P}^{-1}\mathrm{XP}$ sont continus. On en déduit que $e^{t\mathrm{A}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $e^{t\mathrm{T}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Finalement, $\lim_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{A}} = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$.

19. Soit μ une valeur propre de A de partie réelle maximale i.e. $\mathrm{Re}(\mu) = \alpha$. On montre facilement par récurrence que $\mathrm{A}^n u = \mu^n u$ pour $n \in \mathbb{N}$ puis que $f_\mathrm{A}(t)u = e^{t\mathrm{A}}u = e^{\mu t}u$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{t\to+\infty} f_\mathrm{A}(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} e^{\mu t}u = 0$. Comme $u \neq 0$, $\lim_{t\to+\infty} e^{\mu t} = 0$ et donc $\alpha = \mathrm{Re}(\mu) < 0$.

20. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, $\chi_\mathrm{A} = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda}$. Les polynômes $(\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda}$ sont premiers entre eux deux à deux donc, d'après le lemme des noyaux

$$\mathrm{Ker}\,\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} \mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_n)^{m_\lambda} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} \mathrm{F}_\lambda$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0$ donc $\mathrm{Ker}\,\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = \mathbb{C}^n$.

21. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp(A)}$. Comme u commute avec $(u - \lambda\,\mathrm{Id_E})^{m_\lambda}$ ($\mathbb{C}[u]$ est une algèbre commutative), F_λ est stable par u. Notons u_λ l'endomorphisme de F_λ induit par u. Comme $(\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda}$ annule u_λ, λ est l'unique valeur propre de u_λ. u_λ est trigonalisable car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de F_λ dans laquelle la matrice de u est $\lambda\mathrm{I}_{d_\lambda} + \mathrm{N}_\lambda$ où $d_\lambda = \dim \mathrm{F}_\lambda$ et N_λ est triangulaire stricte.
Comme $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} \mathrm{F}_\lambda$, la concaténation des bases $\mathcal{B}_\lambda$ forme une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice de u dans cette base est $\mathrm{D}+\mathrm{N}$ où D est la matrice diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux $\lambda\mathrm{I}_{d_\lambda}$ et N est la matrice diagonale par blocs avec pour blocs diagonaux N_λ. La matrice A est donc semblable à $\mathrm{D}+\mathrm{N}$, d'où l'existence de la matrice P de l'énonocé.
La matrice D est bien diagonale et la matrice N est nilpotente car triangulaire stricte. Chaque bloc $\lambda\mathrm{I}_{d_\lambda}$ commute évidemment avec le bloc N_λ donc D et N commutent. Enfin, comme les N_λ sont triangulaires strictes,

$$\chi_\mathrm{A} = \chi_{\mathrm{D+N}} = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} \chi_{\lambda\mathrm{I}_{d_\lambda}+\mathrm{N}_\lambda} = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} \chi_{\lambda\mathrm{I}_{d_\lambda}} = \chi_\mathrm{D}$$

> **Remarque.** On a donc $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} (\mathrm{X}-\lambda)^{m_\lambda} = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp(A)}} (\mathrm{X}-\lambda)^{d_\lambda}$, ce qui permet de retrouver le résultat connu $\dim \mathrm{F}_\lambda = d_\lambda = m_\lambda$.

22. Notons q l'indice de nilpotence de N. Comme D et N commutent,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t(\mathrm{D+N})} = e^{t\mathrm{D}}e^{t\mathrm{N}}$$

D'une part,

$$e^{t\mathrm{D}} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coefficients diagonaux de D i.e. les valeurs propres de A. Donc $e^{t\mathrm{D}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{\alpha t})$.
D'autre part,

$$e^{t\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{t^k\mathrm{N}^k}{k!}$$

donc $e^{t\mathrm{N}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^{q-1})$. Puisque

$$\|e^{t(\mathrm{D+N})}\| = \|e^{t\mathrm{D}}e^{t\mathrm{N}}\| \leq \|e^{t\mathrm{D}}\|\|e^{t\mathrm{N}}\|$$

On en déduit que $e^{t(\mathrm{D+N})} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^{q-1}e^{\alpha t})$.
Enfin, $e^{t\mathrm{A}} = \mathrm{P}e^{t(\mathrm{D+N})}\mathrm{P}^{-1}$ donc

$$\|e^{t\mathrm{A}}\| \leq \|\mathrm{P}\|\|\mathrm{P}^{-1}\|\|e^{t(\mathrm{D+N})}\|$$

de sorte que $e^{tA} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^{q-1}e^{\alpha t})$. Toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ étant équivalentes, on a également $\|e^{tA}\|_\infty \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^{q-1}e^{\alpha t})$ donc

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ v_{i,j}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^{q-1}e^{\alpha t})$$

Il suffit alors de poser $p = q-1$.

> **Remarque.** On rappelle que pour une application $f : \mathbb{R} \to \mathrm{E}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(g(t))$ signifie qu'il existe une constante C tel que $\|f(t)\| \leq \mathrm{C}|g(t)|$ pour t au voisinage de $+\infty$. Les normes sur E étant équivalentes, cette définition ne dépend pas de la norme considérée.

23. Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} t^p e^{\alpha t} = 0$ par croissance comparées. On en déduit que

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \lim_{t\to+\infty} v_{i,j}(t) = 0$$

Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f_{\mathrm{A}} = 0$.

> **Remarque.** Il est en fait inutile de raisonner sur les coefficients puisqu'on a montré à la question précédente que $f_{\mathrm{A}}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}(t^p e^{\alpha t})$.

24. Si $\mathrm{X} = 0$, $e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0$.
Réciproquement, supposons que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0$ i.e. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{P}e^{t\mathrm{T}}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X} = 0$ en posant $\mathrm{T} = \mathrm{D}+\mathrm{N}$. Par continuité de la multiplication à gauche par P^{-1}, on a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{T}}\mathrm{Y} = 0$ avec $\mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$. Supposons que $\mathrm{Y}\neq 0$ et posons $k = \max\{j\in[\![1,n]\!] \mid \mathrm{Y}_j \neq 0\}$. Alors $(e^{t\mathrm{T}}\mathrm{Y})_k = e^{\lambda_k t}y_k \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui est absurde puisque $|e^{\lambda_k t}y_k| = e^{\mathrm{Re}(\lambda_k)t}|y_k| \geq |y_k|$ pour $t\geq 0$. Ainsi $\mathrm{Y}=0$ puis $\mathrm{X} = \mathrm{PY} = 0$.

25. Les polynômes P_s, P_i et P_n sont premiers entre eux deux à deux (pas de racines communes). De plus, $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{P}_s\mathrm{P}_i\mathrm{P}_n$, donc, d'après le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}_s(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}_i(\mathrm{A}) \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{P}_n(\mathrm{A}) = \mathrm{E}_s \oplus \mathrm{E}_i \oplus \mathrm{E}_n$$

E_s est stable par u ; notons v l'endomorphisme de E_s induit par u. De même, $\mathrm{E}_i\oplus\mathrm{E}_n$ est stable par u ; notons w l'endomorphisme de $\mathrm{E}_i\oplus\mathrm{E}_n$ induit par u. Soit $\mathrm{X}\in\mathrm{E}$. Il existe alors $(\mathrm{Y},\mathrm{Z})\in\mathrm{E}_s\times(\mathrm{E}_i\oplus\mathrm{E}_n)$ tel que $\mathrm{X} = \mathrm{Y}+\mathrm{Z}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = e^{tu}(\mathrm{X}) = e^{tv}(\mathrm{Y}) + e^{tw}(\mathrm{Z})$$

Comme P_s annule v, v n'a que des valeurs propres de parties réelles strictement négatives donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{tv}(\mathrm{Y}) = 0$. Comme w n'a que des valeurs propres de parties réelles positives,

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0\\ \iff &\lim_{t\to+\infty} e^{tw}(\mathrm{Z}) = 0\\ \iff &\mathrm{Z} = 0 \qquad \text{d'après la question précédente}\\ \iff &\mathrm{X}\in\mathrm{E}_s \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\mathrm{E}_s = \left\{\mathrm{X}\in\mathrm{E} \mid \lim_{t\to+\infty} e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0\right\}$$

26. On notera u_s, u_i et u_n les endomorphismes respectifs de E_s, E_i et E_n induits par u.
Soit $\mathrm{X}\in\mathrm{E}$. Il existe alors $(\mathrm{X}_s,\mathrm{X}_i,\mathrm{X}_n)\in\mathrm{E}_s\times\mathrm{E}_i\times\mathrm{E}_n$ tel que $\mathrm{X} = \mathrm{X}_s+\mathrm{X}_i+\mathrm{X}_n$.
Supposons que $\mathrm{X}\in\mathrm{E}_n$. Alors $\mathrm{X}_s = \mathrm{X}_i = 0$ puis

$$e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = e^{tu}(\mathrm{X}) = e^{tu_n}(\mathrm{X}_n)$$

On reprend les calculs de la question **22** : on écrit $u_n = v_n + w_n$ où v_n et w_n sont respectivement diagonalisable et nilpotent et commutent (interprétation en termes d'endomorphismes de la question **21**). Les valeurs propres de d_n sont toutes imaginaires pures donc $e^{td_n} \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(1)$. w_n est nilpotent donc $e^{tw_n} \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(t^p)$ où $p+1$ est l'indice de nilpotence de w_n. Ainsi $e^{tu_n} = e^{tv_n}e^{tw_n} \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(t^p)$ puis $e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = e^{tu_n}(\mathrm{X}_n) \underset{t\to\pm\infty}{=} \mathcal{O}(t^p)$. On en déduit aisément l'existence d'une constante C telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}\|_{\mathrm{E}} \leq \mathrm{C}(1+|t|)^p$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}\|_{\mathrm{E}} \leq \mathrm{C}(1+|t|)^p$$

A nouveau,

$$e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = e^{tu}(\mathrm{X}) = e^{tu_s}(\mathrm{X}_s) + e^{tu_i}(\mathrm{X}_i) + e^{tu_n}(\mathrm{X}_n)$$

Puisque P_s annule u_s, $\mathrm{Sp}(u_s) \subset \{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0\}$. De même, $\mathrm{Sp}(u_i) \subset \{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$ et $\mathrm{Sp}(u_n) \subset \{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),\ \mathrm{Re}(\lambda) = 0\}$.

> **Remarque.** On pourrait même prouver les égalités mais ce n'est pas nécessaire pour la suite. Il s'agit essentiellement de remarquer que les valeurs propres de u_s sont toutes de parties réelles strictement négatives, celles de u_i de parties réelles strictement positives et celles de u_n de parties réelles nulles.

Si $\mathrm{E}_i = \{0\}$, alors $\mathrm{X}_i = 0$. Sinon, E_i possède au moins une valeur propre et on note alors $a = \min\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u_i)} \mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-at}e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = \exp(t(u_s - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_s}))(\mathrm{X}_s) + \exp(t(u_i - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_i}))(\mathrm{X}_i) + \exp(t(u_n - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n}))(\mathrm{X}_n)$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-at}e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0$. De plus,

$$\mathrm{Sp}(u_s - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_s}) = \{\lambda - a,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(u_s)\}$$

donc $u_s - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_s}$ ne possède que des valeurs propres de parties réelles strictement négatives. On en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(t(u_s - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_s}))(\mathrm{X}_s) = 0$$

De même, $u_n - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n}$ ne possède que des valeurs propres de parties réelles strictement négatives donc

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(t(u_n - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n}))(\mathrm{X}_n) = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(t(u_i - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_i}))(\mathrm{X}_i) = 0$$

Comme $u_i - a\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_i}$ ne possède que des valeurs propres de parties réelles positives, $\mathrm{X}_i = 0$.
De la même manière, si $\mathrm{E}_s = \{0\}$, alors $\mathrm{X}_s = 0$. Sinon, on pose $b = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u_s)} \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ et on remarque que

$$e^{bt}e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X} = \exp(t(b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_s} - u_s))(\mathrm{X}_s) + \exp(t(b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_i} - u_i))(\mathrm{X}_i) + \exp(t(b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} - u_n))(\mathrm{X}_n)$$

A nouveau, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{bt}e^{-t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0$ par croissances comparéees et $b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_i} - u_i$ et $b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} - u_n$ ne possèdent que des valeurs propres de parties réelles strictement négatives donc

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(t(b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_i} - u_i))(\mathrm{X}_i) = \lim_{t\to+\infty} \exp(t(b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_n} - u_n))(\mathrm{X}_n) = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(t(b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_s} - u_s))(\mathrm{X}_s) = 0$$

Comme $b\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}_s} - u_s$ ne possède que des valeurs propres de parties réelles positives, $\mathrm{X}_s = 0$.
Finalement, $\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_s = 0$ donc $\mathrm{X} = \mathrm{X}_n \in \mathrm{E}_n$.
On a donc le résultat souhaité par double inclusion.