Devoir surveillé n°16

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- On prendra le temps de vérifier les résultats dans la mesure du possible.
- Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 – Mines-Ponts Maths 2 MP 2022 – Autour des exponentielles de matrices

Dans tout le sujet, le corps $\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n est un entier naturel supérieur ou égal 2.
On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|\mathrm{I}_n\| = 1 \tag{N$_1$}$$
$$\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2,\ \|\mathrm{AB}\| \leq \|\mathrm{A}\|\|\mathrm{B}\| \tag{N$_2$}$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice, notée e^{A}, ou bien $\exp(\mathrm{A})$, définie par

$$e^{\mathrm{A}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

On rappelle que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application

$$f_{\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & e^{t\mathrm{A}} \end{array} \right.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{\mathrm{A}}'(t) = \mathrm{A}e^{t\mathrm{A}} = e^{t\mathrm{A}}\mathrm{A}$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, plus précisément si on a $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors

$$e^{\mathrm{B}} = \mathrm{P}^{-1}e^{\mathrm{A}}\mathrm{P}$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit leur crochet de Lie par

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$$

La partie IV du problème est indépendante des parties II et III.

I Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose dans les questions **1** et

1 Montrer que les matrices A et e^{B} commutent.

On définit une application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & e^{t(\mathrm{A}+\mathrm{B})}e^{-t\mathrm{B}} \end{array} \right.$$

2 Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy.
En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \tag{1}$$

3 Réciproquement, on suppose la relation 1 satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable t, montrer que les matrices A et B commutent.

4 Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, prouver la relation, $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

5 Montrer que $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

II Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{k}A}e^{\frac{1}{k}B}\right)^k = e^{A+B} \text{ ou } \lim_{k\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k = \exp(A+B) \tag{2}$$

Pour k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{1}{k}A\right)\exp\left(\frac{1}{k}B\right) \text{ et } Y_k = \exp\left(\frac{1}{k}(A+B)\right)$$

6 Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|X_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right) \text{ et } \|Y_k\| \leq \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right)$$

On introduit la fonction

$$h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & e^{tA}e^{tB} - e^{t(A+B)} \end{array}\right.$$

7 Montrer que

$$X_k - Y_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ lorsque } k \to +\infty$$

8 Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i(X_k - Y_k)Y_k^{k-1-i}$$

En déduire la relation 2.

III Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on introduit l'ensemble, dit groupe spécial linéaire :

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$$

Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, on introduit son algèbre de Lie :

$$\mathcal{A}_G = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ e^{tM} \in G\right\}$$

L'ensemble $SL_n(\mathbb{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$, sont bien des sous groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = SL_n(\mathbb{R})$.

10 Si $G = O_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices symétriques.

Dans les questions **11** à **14**, G est sun sous-groupe fermé quelconque de $GL_n(\mathbb{R})$.

11 En utilisant la partie II, montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12 Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & e^{tA}Be^{-tA} \end{array} \right.$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie i.e.

$$\forall A \in \mathcal{A}_G,\ \forall B \in \mathcal{A}_G,\ [A, B] \in \mathcal{A}_G$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est tangente à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L''ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé espace tangent à G en I_n, et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.
On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe, soit l'application $\delta_M : t \in \mathbb{R} \mapsto \det(I_n + tM)$.
En utilisant un développement limité à l'ordre 1, montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 Montrer que la différentielle au point I_n de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est la forme linéaire «trace».

17 Montrer que, dans les cas particuliers $G = SL_n(\mathbb{R})$ et $G = 0_n(\mathbb{R})$, on a $T_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

IV Comportement asymptotique

Etude d'un exemple

On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double.

18 Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pose $E = \mathbb{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et a celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice e^{tA}. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_A(t) = e^{tA} = (v_{i,j}(t))_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \operatorname{Ker}\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{m_\lambda}\right)$$

On posera aussi $\alpha = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$.

19 Montrer que si $\lim\limits_{t\to+\infty} f_A(t) = 0$, alors $\alpha < 0$.

20 Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

- P est inversible,
- D est diagonale,
- N est nilpotente,
- $ND = DN$, $A = P(D+N)P^{-1}$ et $\chi_A = \chi_D$.

22 En déduire l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = \mathcal{O}(t^p e^{\alpha t}) \text{ lorsque } t \to +\infty$$

23 Etudier la réciproque de la question **19**.

24 On suppose, *dans cette question seulement*, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0 \iff X = 0$$

Dans les questions qui suivent, on introduit les polynômes suivants :

$$P_s(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \\ \operatorname{Re}(\lambda) < 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$
$$P_i(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \\ \operatorname{Re}(\lambda) > 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$
$$P_n(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \\ \operatorname{Re}(\lambda) = 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

Et les sous-espaces $E_s = \operatorname{Ker}(P_s(A))$, $E_i = \operatorname{Ker}(P_i(A))$ et $E_n = \operatorname{Ker}(P_n(A))$ de $E = \mathbb{C}^n$. *Les indices s, i ,n signifient respectivement stable, instable et neutre.*

25 Après avoir justifié que $\mathrm{E} = \mathrm{E}_s \oplus \mathrm{E}_i \oplus \mathrm{E}_n$, montrer que

$$\mathrm{E}_s = \left\{ \mathrm{X} \in \mathrm{E} \mid \lim_{t \to +\infty} e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0 \right\}$$

On prouverait de même, mais ce n'est pas demandé, que

$$\mathrm{E}_i = \left\{ \mathrm{X} \in \mathrm{E} \mid \lim_{t \to -\infty} e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X} = 0 \right\}$$

26 Montrer que

$$\mathrm{E}_n = \left\{ \mathrm{X} \in \mathrm{E} \mid \exists \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \|e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}\|_{\mathrm{E}} \leq \mathrm{C}(1+|t|)^p \right\}$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbb{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{t\mathrm{A}}\mathrm{X}$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.