Comparaison de fonctions

Croissances comparées

Au voisinage de $+\infty$

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha < \beta \iff x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a < b \iff e^{ax} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{bx})$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $(\ln x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\alpha x})$.

Au voisinage de 0

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha > \beta \iff x^\alpha \underset{x\to 0}{=} o(x^\beta)$.
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $|\ln x|^\alpha \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

Au voisinage de $-\infty$

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $e^{\alpha x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{|x|^\beta}\right)$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $a > b \iff e^{ax} \underset{x\to-\infty}{=} o(e^{bx})$.

Équivalents usuels

Logarithme, exponentielle, puissance

Un polynôme est équivalent en 0 (resp. en $\pm\infty$) à son monôme de plus bas (resp. haut) degré.

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$$
$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad \text{i.e.} \quad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$$

Fonctions circulaires

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \sin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$
$$1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{i.e.} \quad \cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \tan x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

Fonctions circulaires réciproques

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \arcsin x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$
$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \arctan x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$

Fonctions hyperboliques

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{sh}\, x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$
$$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{ch}\, x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{th}\, x \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$$