Probabilités

Lois usuelles

Bernoulli Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(p)$, alors

$$\mathrm{X}(\Omega) = \{0, 1\} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = 1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \end{cases} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = p \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = p(1-p) \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = 1 - p + pt$$

Binomiale Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$\mathrm{X}(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = np \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = np(1-p) \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = (1 - p + pt)^n$$

Uniforme Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{U}(\mathrm{E})$, alors

$$\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{E} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{1}{\operatorname{card} \mathrm{E}}$$

L'espérance et la variance n'ont de sens que si $\mathrm{E} \subset \mathbb{R}$ et la fonction génératrice que si $\mathrm{E} \subset \mathbb{N}$.

Géométrique Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{G}(p)$, alors

$$\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = (1-p)^{k-1} p \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{p} \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = \frac{1-p}{p^2} \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$$

Poisson Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \qquad \mathbb{E}(\mathrm{X}) = \lambda \qquad \mathbb{V}(\mathrm{X}) = \lambda \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

Espérance, variance, covariance

Espérance Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur un espace probabibilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si la famille $(x\mathbb{P}(\mathrm{X} = x))_{x \in \mathrm{X}(\Omega)}$ est sommable,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} x \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

Variance Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre 2.

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}\left((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\right) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2$$

Covariance Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles admettant un moment d'ordre 2.

$$\operatorname{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathbb{E}\left((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))(\mathrm{Y} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}))\right) = \mathbb{E}(\mathrm{XY}) - \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$$

Formules

Formule des probabilités totales Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{S}$ un système complet d'événements et B un événement. Alors

$$\mathbb{P}(\mathrm{B}) = \sum_{\mathrm{A} \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \mathbb{P}(\mathrm{A})$$

Formule de transfert Soient X une variable aléatoire discrète et $f : \mathrm{X}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors $f(\mathrm{X})$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)\mathbb{P}(\mathrm{X} = x))_{x \in \mathrm{X}(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(\mathrm{X} = x)$$

Fonctions génératrices

Espérance Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$$

Variance Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1 et, dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

Inégalités

Inégalité de Markov Soient X une variable aléatoire discrète réelle *positive* d'espérance finie et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Soient X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$