INTERROGATION ÉCRITE N°01

NOM : Prénom : Note :

1. Déterminer un équivalent simple de la somme partielle de la série $\sum \sqrt{n}$.

Première méthode. *On remarque que*

$$n^{3/2} - (n-1)^{3/2} = n^{3/2}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{3/2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\sqrt{n}$$

ou encore $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\left(n^{3/2} - (n-1)^{3/2}\right)$. *Comme* $\sqrt{n}$ *est une série à termes positifs divergente*

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(k^{3/2} - (k-1)^{3/2}\right) = \frac{2}{3}n^{3/2}$$

Deuxième méthode. *La fonction* $t \mapsto \sqrt{t}$ *est croissante donc*

$$\forall k \geq 1,\ \int_{k-1}^{k} \sqrt{t}\ \mathrm{d}t \leq \sqrt{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt{t}\ \mathrm{d}t$$

puis

$$\forall n \geq 1,\ \int_{0}^{n} \sqrt{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \int_{1}^{n+1} \sqrt{t}\ \mathrm{d}t$$

puis

$$\forall n \geq 1,\ \frac{2}{3}n^{3/2} \leq \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \leq \frac{2}{3}(n+1)^{3/2} - 1 \leq \frac{2}{3}(n+1)^{3/2}$$

Comme $(n+1)^{3/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{3/2}$, $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{3/2}$. ∎

2. Déterminer un équivalent simple du reste de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Première méthode. *On sait que* $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. *Comme la série* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est un série à termes positifs convergente,*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{n}$$

Deuxième méthode. *Comme* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall k \geq 2,\ \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$$

puis

$$\forall n \geq 2,\ \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

ou encore

$$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. ∎

3. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$.

   Par croissances comparées, $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. *Or* $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *est une série à termes positifs convergente donc* $\sum \frac{\ln n}{n^2}$. ∎

4. Justifier la convergence de la série $\sum 2^{n+2} \cdot 3^{1-n}$ et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{n+2} \cdot 3^{1-n}$.

   Remarquons que $2^{n+2} \cdot 3^{1-n} = 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. *La série* $\sum 2^{n+2} \cdot 3^{1-n}$ *est donc une série géométrique de raison* $\frac{2}{3} \in [0, 1[$ *donc une série convergente. De plus,*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^{n+2} \cdot 3^{1-n} = 12 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 12\left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 12 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 16$$

∎

5. Justifier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n (\ln(n+1) - \ln(n))$.

   Remarquons que $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. *Ainsi la suite* $(\ln(n+1) - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante et de limite nulle. La série* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n (\ln(n+1) - \ln(n))$ *converge d'après le critère spécial des séries alternées.* ∎