

NOM :

Prénom :

Note :

1. On pose $u_n = \frac{n}{3} - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) diverge.

On remarque que $u_{3n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{3n+1} = n + \frac{1}{3} - \left\lfloor n + \frac{1}{3} \right\rfloor = n + \frac{1}{3} - n - \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = \frac{1}{3}$$

Ainsi 0 et $\frac{1}{3}$ sont deux valeurs d'adhérence distinctes de la suite (u_n) . Celle-ci ne peut converger. ■

2. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto e^z$. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe (\mathbb{C}^*, \times) . Est-il injectif? surjectif?

Pour $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = e^{z+z'} = e^z e^{z'} = f(z)f(z')$ donc f est bien un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans le groupe (\mathbb{C}^*, \times) .

De plus, $f(2i\pi) = f(0) = 1$ donc f n'est pas injectif. Enfin, si l'on se donne $Z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $Z = re^{i\theta}$. Alors $Z = f(\ln r + i\theta)$ de sorte que f est surjectif. ■

3. On note $SL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de déterminant 1. Montrer que $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

Première méthode. Pour tout $M \in SL_n(\mathbb{K})$, $\det(M) = 1 \neq 0$ de sorte que $M \in GL_n(\mathbb{K})$. Ainsi $SL_n(\mathbb{K}) \subset GL_n(\mathbb{K})$.

De plus, $\det(I_n) = 1$ donc $I_n \in SL_n(\mathbb{K})$.

Enfin, pour $(A, B) \in SL_n(\mathbb{K})^2$, $\det(AB^{-1}) = \det(A)/\det(B) = 1/1 = 1$ donc $AB^{-1} \in SL_n(\mathbb{K})$.

$SL_n(\mathbb{K})$ est donc bien un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$.

Deuxième méthode. On vérifie que \det est un morphisme de $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ dans (\mathbb{K}^*, \times) . Ainsi $SL_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ en tant que noyau de ce morphisme. ■

4. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On pose $\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt$ pour $f \in E$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

On remarque que pour $f \in E$, $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_1$.

Homogénéité Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$. Alors

$$\|\lambda f\| = |(\lambda f)(0)| + \|(\lambda f)'\|_1 = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_1 = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \|f'\|_1 = |\lambda| \|f\|$$

en utilisant l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_1$.

Inégalité triangulaire Soit $(f, g) \in E^2$. Par inégalité triangulaire pour la valeur absolue et la norme $\|\cdot\|_1$,

$$\|f + g\| = |(f + g)(0)| + \|(f + g)'\|_1 = |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_1 \leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_1 + \|g'\|_1 = \|f\| + \|g\|$$

Séparation Soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$. Alors $|f(0)| + \|f'\|_1 = 0$. Comme les deux termes de la somme sont positifs, ils sont nuls. Ainsi $|f(0)| = 0$ et $\|f'\|_1 = 0$. Comme $\|\cdot\|_1$ est une norme, on obtient par séparation $f' = 0$. Ainsi f est constante sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, f est nulle sur $[0, 1]$. ■

5. On pose $N(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{i=1}^n |(AB)_{i,j}| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{i,k} B_{k,j}| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |A_{i,k}| |B_{k,j}| \\ &= \sum_{k=1}^n |B_{k,j}| \sum_{i=1}^n |A_{i,k}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |B_{k,j}| N(A) \\ &= N(A) \sum_{k=1}^n |B_{k,j}| \leq N(A)N(B) \end{aligned}$$

Ainsi $N(AB) = \max_{1 \leq j \leq n} S_j \leq N(A)N(B)$. ■